الرياضيات الحديثة

- الكميات المتجهة
- الهندسة الناقصية
- الاقترانات المطابقة (المشاكلة)



﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الرياضيات الحديثة

(الكميات المتجهة، الهندسة اللاقصية، الاقترانات المطابقة (المشاكلة)، المنطق، المجموعات، البنى الجبرية، الانحدار والتباعد والالتفاف)

الرياضيات الحديثة

- الكميات المتجهة
- الهندسة الناقصية
- الاقترانات المطابقة (المشاكلة)
- المنطق، المجموعات، البنى الجبرية
- الانحدار والتباعد والالتفاف

نائل إسماعيل الفيومي

الطبعة الأولى
2008م - 1429هـ



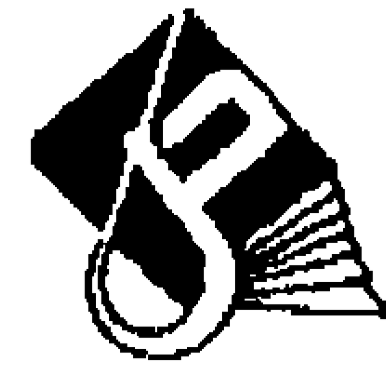
دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

الرياضيات الحديثة : (الكميات المتجهة، الهندسة الناقصية، الاقترانات المطابقة (المشاكلة)، المنطق، المجموعات، البنى الجبرية، الانحدار والتباعد والالتفاف)

تأليف : نائل إسماعيل الفيومي

الطبعة الأولى

2008 م - 1429 هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري -
تلفاكس 4612190 6 962+
ص.ب 922762 عمان - 11192 الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190 P.O.Box: 922762
Amman 11192- Jordan

http://www.darsafa.net
E-mail :safa@darsafa.net

الفهرس

المقدمة

حرصت دار صفاء للنشر والتوزيع منذ تأسيسها، على رفد المجتمع العربي بكل ما هو نافع ومفيد من العلوم والآداب، والدراسات الإنسانية، والمعارف والثقافة على مختلف صنوفها وأنواعها، مترسمة نهج الأمانة، وسبر أغوار المعلومات، ودقة التمحيص والبحث، واعتماد المراجع الموثوق بها، بترباً بالمواطن والدارس والمعلم والأستاذ إلى آرج ينابيع العلم والمعرفة، لتجعل منهم قادة، وعظماء، وبناة أمة ومهندسي حضارة يواكبون كل ما هو جديد، ويحملونها بجدهم واجتهادهم ومثابرتهم ليزهو مجتمعنا نجوماً زاهرة على هامات الدنا، متألقاً مزهواً بأبنائه.

وانطلاقاً من ثوابتها، وسيراً على نهجيها، من بياتها حراصا على رفع شأن العلم، فقد أخذت على عواتقها تشجيع الطلبة على تأسيس مكتباتهم العلمية الخاصة؛ وذلك بنشر سلسلة الرياضيات الحديثة، والتي جاءت شاملة لكل ما يحتاجه الطالب دارساً وباحثاً.

لقد جاءت هذه السلسلة، لتوفر على أبنائنا الأعزاء الجهد والوقت، إنها تعتبر نقلة نوعية في عالم نشر وتوزيع المعرفة والثقافة، سلسلة لا يستغني عنها المثقف والمتعلم والمعلم، إنها بحق جديرة بالقراءة والإطلاع، جديرة بالاهتمام، جديرة بالاقتناء.

والله من وراء القصد

الناشر



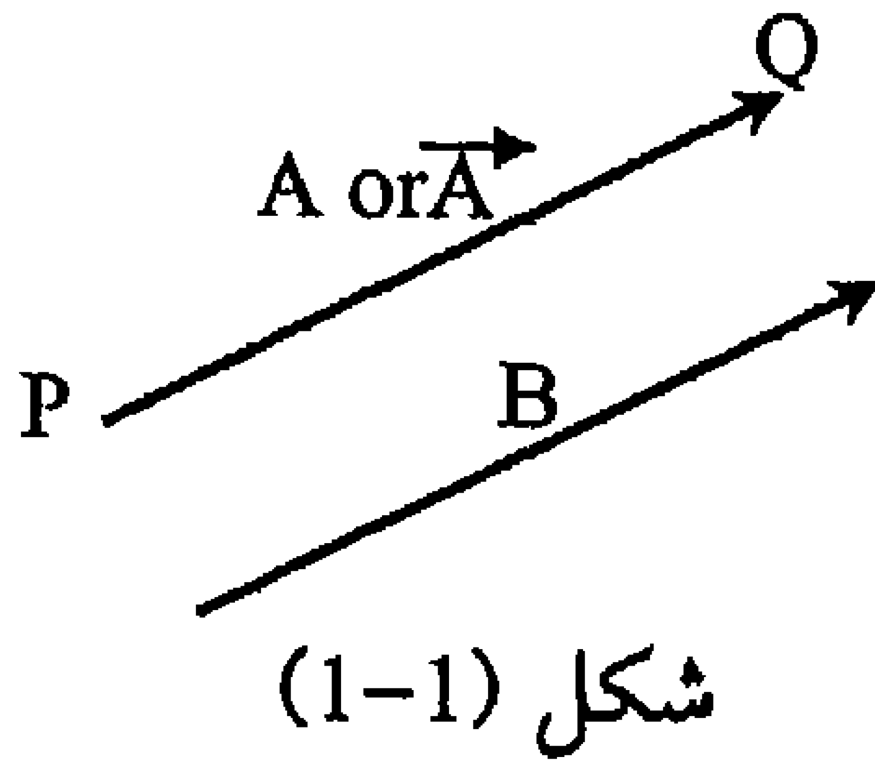
الفصل الأول

الكميات المتجهة

الفصل الأول

الكميات المتجهة

الكميات المتجهة والكميات العددية:



شكل (1-1)

توجد كميات في الفيزياء تتميز بكلاً المقدار والاتجاه، مثل الإزاحة، السرعة، القوة، العجلة. لوصف مثل هذه الكميات، سنعرف فكرة للمتجه كجزء من خط مستقيم $\overrightarrow{PQ}$ من نقطة واحدة P تسمى نقطة الابتداء إلى نقطة أخرى Q تسمى نقطة النهاية.

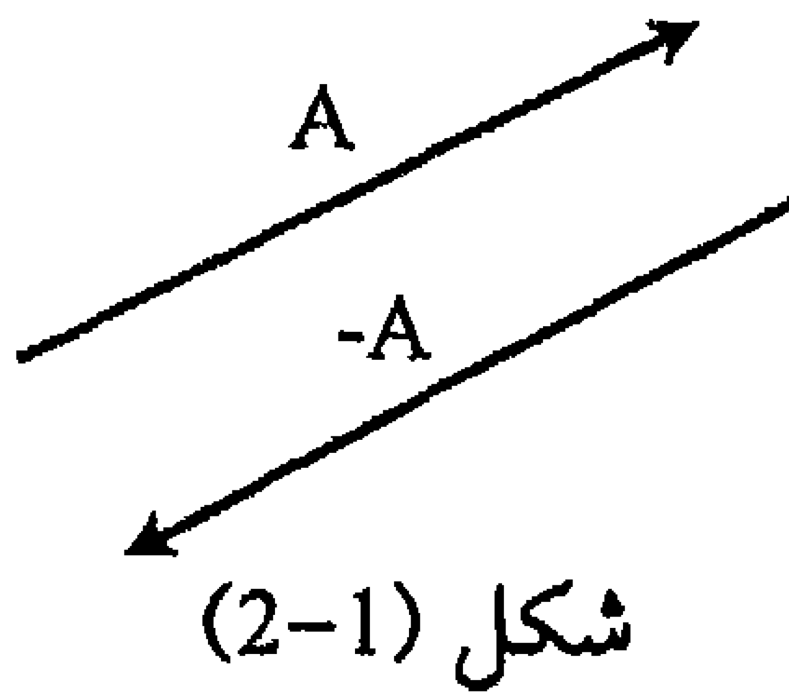
تشير إلى المتجهات بحروف أكثر سمكاً وأكثر سواداً أو بسهم فوق الحروف أي أن $\overrightarrow{PQ}$ يشار إليه بالرمز A أو $\vec{A}$ كما في شكل 1-7 للمقدار أو الطول للمتجه يشار إليه بالرموز $|A|, \overline{PQ}, |\overline{PQ}|$ ' $|\vec{A}|$.

وتوجد كميات أخرى في الفيزياء تتميز فقط بالمقدار مثل الكتلة، الطول، درجة الحرارة. مثل هذه الكميات غالباً تسمى كميات عددية للتفريق بينها وبين المتجهات، لكن من الضروري أن تؤكد أن الكميات العددية بخلاف الوحدات مثل القدم والدرجة والخ، لأن هنا ليس أكثر من أعداد حقيقية ولذلك يمكننا أن نشير إليها بحروف عادية كالمعتاد.

جبر المتجهات:

عمليات الجمع والطرح والضرب للأعداد المألوفة في الجبر وبتعريف مناسب قادرة على السريان في جبر المتجهات.

التعريفات الآتية أساسية:



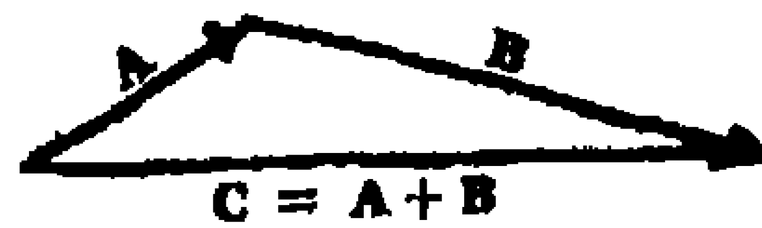
شكل (1-2)

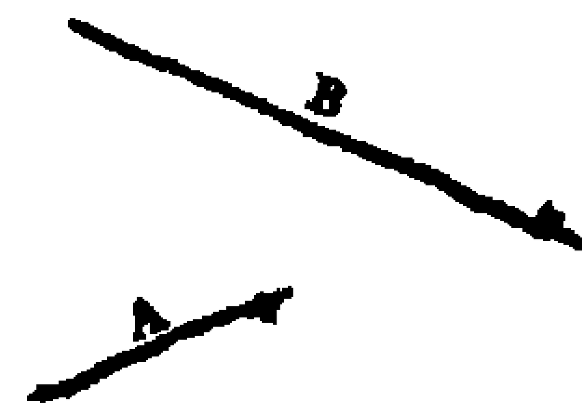
1- المتجهان A و B متساويان إذا كان لهما المقـدار نفسه والاتجاه بصرف النظر عن نقـط الابتـداء. إذن A=B في شكل 7-1 أعلاه.

2- متجه له اتجاه عكسي للمتجه A لكن له المقـدار نفسه يشار إليه بالرمز A– [انظر شكل 7-2].

3- المجموع أو المحصلة للمتجهين A و B من شكل 7-3 (أ) هـو المتجـه C المكـون من وضع النقطة الابتدائية من المتجه B على النقطة النهائية للمتجه A ثم نصل النقطة الابتدائية للمتجه A إلى النقطـة النهائيـة للمتجـه B [أنظـر شـكل 7-3 (ب). المجموع C يكتب C = A+B. يكون التعريف هنا مكافئاً لقانون متـوازي الأضلاع لجمع المتجه كما هو موضح في الشكل 7-3 (جـ).



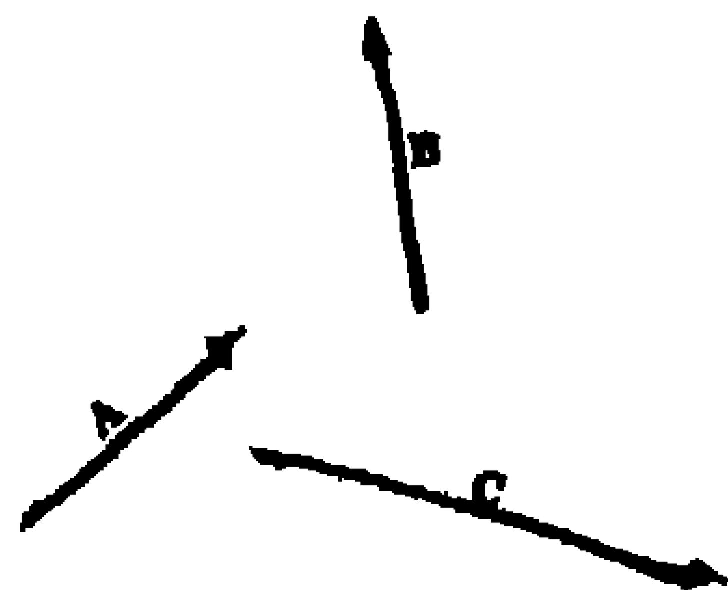


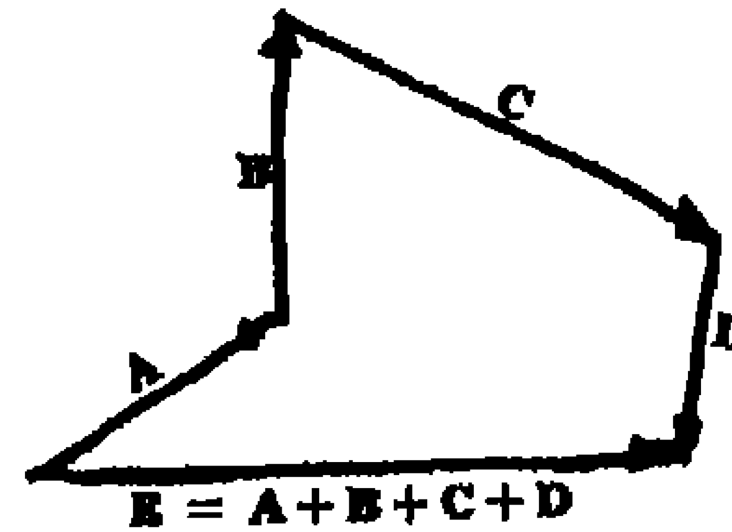


(جـ) (ب) (أ)

شكل (1-3)

سريان ذلك على الجمع لأكثر من متجـهين يكـون مباشـرة. مثـال ذلـك في شكل 7-4 أسفل يوضح كيف الحصول على المجموع أو المحصلة E للمتجـهات Dو C و B وA.





شكل (1-4)

4- الفرق بين المتجهين A، B تمثل بالمتجه A–B وهو المتجه C الذي يجمع إلى المتجه B . ليعطى المتجه A تكافئاً المتجه A-B يمكن أن يعرف مثل المتجه (-A+(B. إذا كان A=B فإن A-B يعرف بالمتجه صفر ويمثل 0. وهذا المتجه مقداره صفر واتجاهه غير معرف.

5- حاصل ضرب المتجه A في المقدار العددي m ينتج المتجه mA وطول |m| مضروب في طول المتجه A واتجاهه نفس اتجاه A أو عكسه، وذلك على حسب ما تكون m موجبة أو سالبة إذا كانت m=0 فإن المتجه mA=0 هو متجه صفر.

قوانين جبر المتجهات:

إن كانت A،B،C متجهات والمقداران m و n مقادير عددية، فإن:

1- قانون التبديل للجمع $A+B=B+A$.

2- قانون الترافق للجمع $A+(B+C)=(A+B)+C$

3- قانون الترافق للضرب $m(nA) = (mn)A = n(mA)$

4- قانون التوزيع $(m+n)A = mA + nA$

5- قانون التوزيع $m(A+B)=mA + mB$

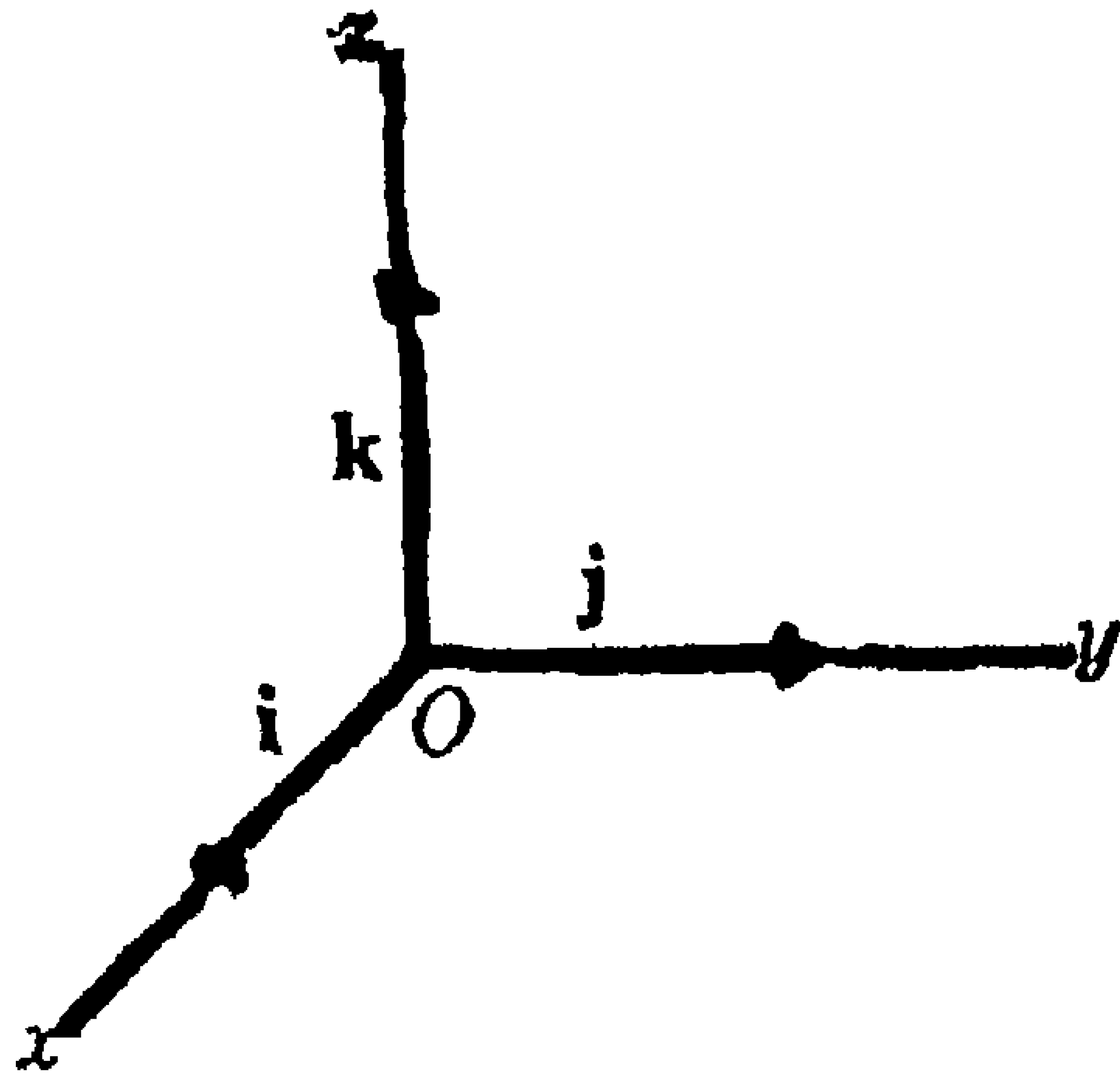
لاحظ أن في هذه القوانين ضرب متجه فقط بمقدار عددي أو أكثر قد عرف لاحقاً سنعرف ضرب المتجهات.

وحدة المتجهات:

وحدة المتجهات هي متجهات طولها الوحدة. إذا كانت A أي متجه الذي طوله $A > 0$ فإن، A/A هي وحدة المتجهات أو الوحدة المتجهة، ويرمز له بالمقدارة a وله نفس اتجاه المتجه A. إذن $A= Aa$.

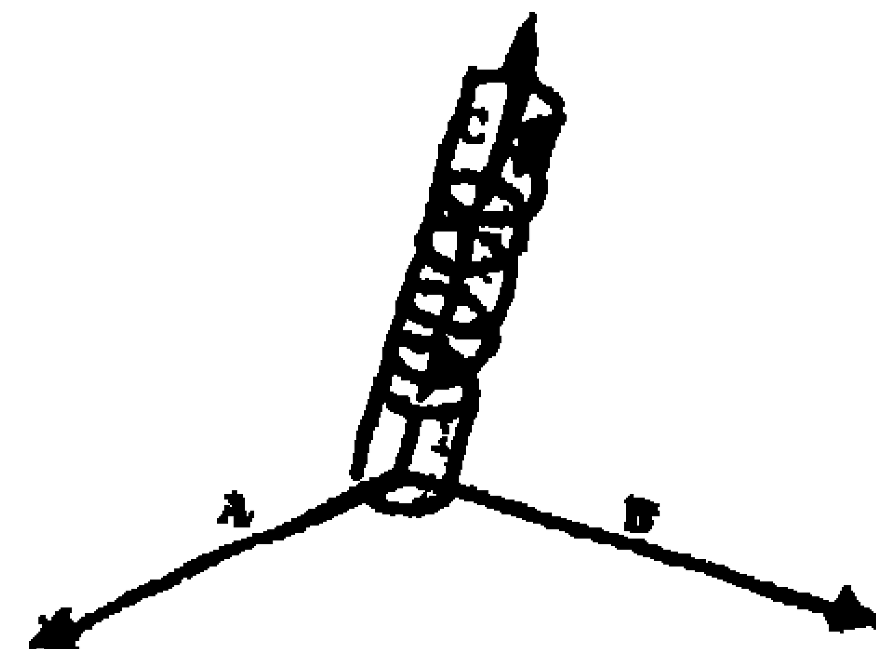
وحدة المتجهات العمودية:

وحدة المتجهات العمودية هي ,i,j, k وهي وحدة متجهات لها اتجاه موجب في النظام الإحداثي العمودي [أنظر شكل 7-5] نستعمل أنظمة الإحداثيات العمودية اليمينية ما لم يعين غير ذلك مثل هذه المنظومات تشتق اسمها من واقع حركة مسمار ملولب (قلاووط) عمودي يدور خلال زاوية مقدارها تسعون درجة من Ox إلى Oy

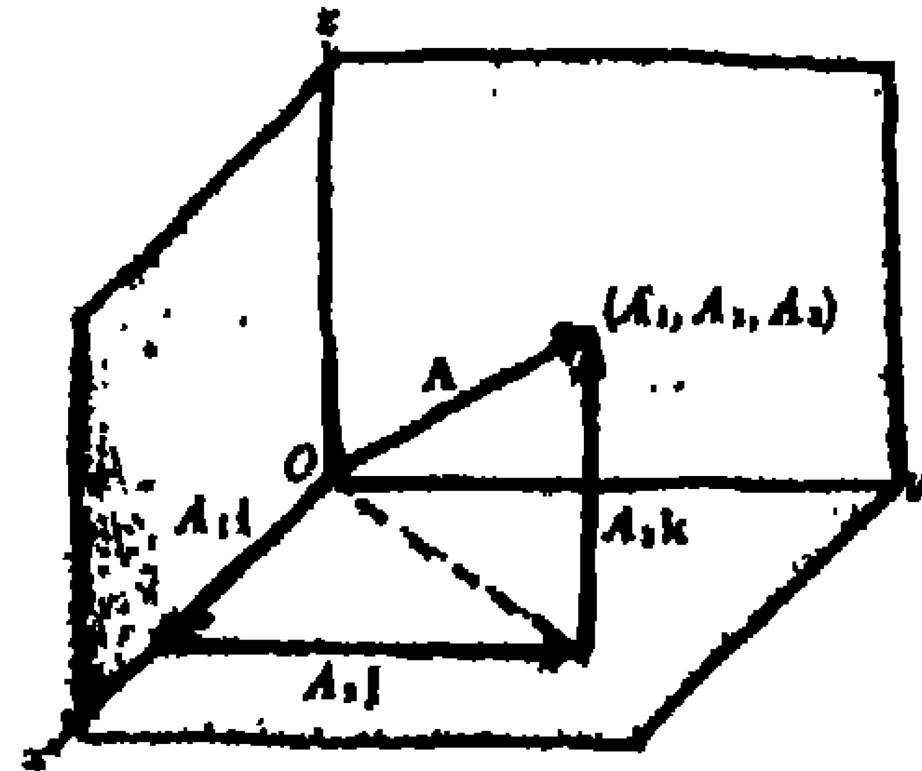


شكل (1-5)

وسيرتفع في الاتجاه الموجب z. وعموما ثلاثة متجهات C,B,A نقطها الابتدائية منطبقة على بعضها وليست في مستوى واحد يقال إنها تكون نظاما يمينيا إذا كان مسمار ملولب (قلاووط) عموديا يدور خلال زاوية أقل من مائة وثمانون درجة من المتجه A إلى المتجه B وسيرتفع في اتجاه المتجه C [انظر شكل 7-6 أسفل]



شكل (1-6)



شكل (1-7)

مركبات المتجهة:

أي متجه A في ثلاثة أبعاد يمكن تمثيله بنقطة ابتدائية عند نقطة الأصل 0 بنظام إحداثي عمودي [أنظر شكل 7-7 أعلا] إذا فرضنا (A1,A2,A3) هي الإحداثيات العمودية للنقطة النهائية للمتجه A التي نقطته الابتدائية عند 0.

المتجهات A_1i, A_2j,A_3k تسمى مركبة المتجهات العمودية أو اختصاراً مركبة المتجهات للمتجه A في الاتجاهات x,y,z على الترتيب A_1,A_2,A_3 تسمى المركبات العمودية وبالاختصار المركبات للمتجه A في اتجاهات x,y,z على الترتيب.

الجموع أو المحصلة للمقادير A_3k و A_2j و A_1i هو المتجه A بحيث أنه يمكننا كتابة:

$$A = A_1i + A_2j + A_3k \qquad ....(1)$$

مقدار المتجه (طول المتجه) A هو:

$$A=|A|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2} \qquad ....(2)$$

وبصورة خاصة متجه الموضع أو المتجه القطري r من نقطة الأصل 0 إلى النقطة (x,y,z) تكتب:

$$r= xi + yi + zk \qquad ....(3)$$

وله المقدار (أو الطول)

$$r=|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

الضرب العددي أو ضرب النقطة:

ضرب النقطة أو الضرب العددي للمتجهين B و A يشار إليها بالمقدار A.B (تقرأ A نقطة B) ويعرف بأنه حاصل ضرب مقدار المتجه A ومقدار المتجه B وجتا الزاوية بين المتجهين. وبالرموز.

$$A.B = AB\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad ....(4)$$

لاحظ أن A.B مقدار عددي وليس متجهاً.

القوانين الآتية صحيحة:

1- قانون التبديل للضرب العددي $A.B = B.A$

2- قانون التوزيع $A. (B+C) = A.B + A.C$

3- حيث m مقدار عددي $m(A.B) = (mA). B = A. (mB) = (A.B)m$

4- $i.i = j.j = k.k = 1,\ i.j = j.k = k.i = 0$

5- إذا كانت $A = A_1i + A_2j + A_3k$ ، $B = B_1i + B_2j + B_3k$ فإن:

$$A.B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$A.A = A_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$B.B = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

6- إذا كان $A.B=0$ والمتجهين A و B ليسا متجهين صفريين فإن المتجه A وكذلك المتجه B يكونان متعامدين.

ضرب المتجهة:

ضرب المتجه للمتجهين A و B هو متجه $A=C \times B$ (يقرأ المتجه A ن(×) المتجه B).

[لاحظ في حالة الضرب العددي لمتجهين يقرأ المتجه الأول نقطة (.) المتجه الثاني]

مقدار المتجه $A \times B$ يعرف بأنه حاصل ضرب مقدار المتجه A ومقدار المتجه B وجا الزاوية بين المتجهين A وB. اتجاه المتجه $C = A \times B$ عمودي على المستوى للمتجهين A،B بحيث أن C.B.A تكون نظاماً يمينياً. بالرموز:

$$A \times B = AB \sin \theta u, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad .... (5)$$

حيث u وحدة متجه تشير إلى اتجاه المقدار $A \times B$. إذا كان $A \times B$. إذا كان $A=B$ أو إذا كان A موازياً للمتجه B، فإن جا θ = صفر وتعرف أن $A \times B = 0$.

القوانين الآتية صحيحة:

1- يفشل قانون التبديل للضرب الموجه $A \times B = -B \times A$

2- قانون التوزيع $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$

3- حيث m مقدار عددي $m(A \times B) = (mA) \times B = A \times (mB) = (A \times B)m$

4- $i \times i = j \times j = k \times k = 0, \quad i \times j = k,\ j \times k = i,\ k \times i = j$

5- إذا كان $A = A_1i + A_2j+A_2k$, $B = B_1i+B_2j+B_2k$ فإن:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6- $|A\times B|$ = مساحة متوازي الأضلاع ضلعاه A،B.

7- إذا كانت $A\times B=0$، المتجه A والمتجه B ليسا متجهين صفريين فإن المتجهين A وB متوازيان.

الضرب الثلاثي:

الضرب العددي والضرب المتجه لثلاثة متجهات AوBوC يمكن أن تقدم حواصل ضرب ذات معنى على الصورة $A.(B\times C)$ $(A.B)C$، $A\times(B\times C)$. القوانين الآتية صحيحة.

1- بوجه عام $(A.B)C \neq A(B.C)$.

2- $A.(B\times C) = B.(C\times A) = C.(A\times B) =$.

حجم متوازي السطوح الذي حروفه هي المتجهات A,B,C أو الحجم بإشارة سالبة إذا كانت المتجهات Cو Bو A لا تكون نظاما يمينيا. إذا كان $A_1i+A_2j+A_3k$, $B=B_1i+B_2j+B_3k$, $C=C_1i+C_2j+C_3j$ فإن:

$$A.(B\times C)=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

3- قانون الترافق للضرب الموجه يفشل $A\times(B\times C) \neq (A\times B)\times C$

4- $A\times(B\times C) = (A.C)B - (A.B)C$

$(A\times B)\times C = (A.C)B - (B.C)A$

حاصل ضرب $A.(B\times C)$ يسمى أحيانا الضرب الثلاثي العددي أو الضرب الصندوقي وأحيانا يرمز له بالمقدار $[ABC]$. حاصل ضرب $A(B\times C)$ يسمى حاصل ضرب الثلاثي المتجه.

في $A(B\times C)$ تحذف الأقواس أحيانا ونكتب $A.B\times C$. لكن من الضروري أن تستعمل الأقواس في $A\times(B\times C)$ (انظر مسألة رقم 29). لاحظ أن $(A\times B).C=A.(B\times C)$. وهذا غالبا يعبر عنه بالنص أنه في حالة الضرب الثلاثي العددي فإن الضرب العددي والضرب المتجه يمكن أن يحل كل منهما مكان الآخر بدون تأثير على النتيجة أنظر مسألة 26).

التقدم البديهي نحو تحليل المتجه:

من الملاحظات السابقة يتضح أن المتجه $r = xi + yj + zk$ يحدد عندما تكون مركباته الثلاثة (x,y,z) بالنسبة إلى نظام إحداثي ما معلومة. بتبني الطريقة البديهية فمن الواضح طبيعيا أن نعمل الآتي:

تعريف: المتجه في ثلاثة أبعاد هو ثلاثي الرتبة للأعداد الحقيقية (A_1,A_2,A_3)

وبهذا كنقطة ابتداء يمكننا أن نعرف التساوي، جمع وطرح المتجهات الخ.

لذا إذا كانت (A_1,A_2,A_3) و $B(B_1,B_2,B_3) =$ فنعرف:

1- $A_1 = B_1, A_2=B_2, A_3=B_3$ إذا وإذا فقط $A=B$.

2- $A+B = (A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3)$

3- $A-B = (A_1-B_1,\ A_2-B_2,\ A_3-B_3)$

4- $0 = (0,0,0)$

5- $mA = m(A_1,A_2,A_3) = (mA_1, mA_2, ,mA_3)$

6- $A.B = A_1B_1 + A_2B_2+A_3B_3$

7- $A|A|=\sqrt{A.A}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$ هو طول أو مقدار المتجه.

$A+B=B+A. A+(B+C)=(A+B) + C, A.(B+C)=A.B + A.C$

إلخ وبتعريف وحدة المتجهات.

$i(1,0,0). \quad j=(0,1,0) \quad k=(0,0,1)$ ....(7)

يمكننا أن نوضح أن:

$A = A_1i + A_2j + A_3k$ ....(8)

وبطريقة مشابهة يمكننا تعريف $A\times B=(A_2B_3-A_3B_2, A_3B_1-A_1B_2-A_2B_1)$

بعد هذا التطور في النظام البديهي يمكننا تفسير النتائج هندسيا وفيزيائيا. فمثلا يمكننا أن نوضح أن:

$A.B = AB\cos\theta, |A\times B| = AB\sin\theta$، إلخ.

فيما سبق اعتبرنا المتجهات في ثلاثة أبعاد. ومن السهل امتداد تلك الفكرة على متجه أبعاده أعلى فمثلا متجه في أربعة أبعاد يعرف بأنه رباعي الرتبة (A_1,A_2,A_3,A_4).

الدوال المتجهة:

إذا كان مناظرا لكل قيمة من المقدار العددي u ترافق المتجه A. فحينئذ المتجه A يسمى دالة المقدار العددي u ويرمز له $A(u)$. في ثلاثة أبعاد يمكننا أن نكتب $A(u) = A_1(u)i + A_2(u)j + A_3(u)k$.

وفكرة الدالة يمكن امتدادها بسهولة. فمثلا إذا كان لكل نقطة (x,y,z) يناظرها المتجه A، حينئذ المتجه A هو دالة للنقطة (x,y,z) ونشير إلى ذلك بالمقدار $A(x,y,z)=A_1(x,y,z)\,i + A_2(x,y,z)\,j + A_3(x,y,z)\,k$.

أحيانا نقول إن دالة المتجه $A(x,y,z)$ تعرف مجال المتجه أو حقل المتجه لأنه يرافق متجها بكل نقطة في المنطقة. بالمثل $\phi(x,y,z)$ تعرف مجالا عدديا أو حقلا عدديا لأنه يرافق مقدارا عدديا بكل نقطة في المنطقة.

النهايات والاستمرار والمشتقات للدوال المتجهة:

النهايات والاستمرار والمشتقات للدوال المتجهة تتبع قواعد للدوال العددية. العبارات الآتية توضح التناظر الموجود.

1- الدالة المتجهة $A(u)$ يقال إنها مستمرة عند u_0 إذا كانت لأي عـدد موجب $\in$، يمكننا إيجاد عدد ما موجب δ بحيث أن $|A(u)-A(u_0)| < \in$ كلما $|u-u_0| < \delta$.
هذه تكافئ النص أو العبارة $\lim\limits_{u\to u_0} A(u)=A(u_0)$.

2- مشتقة الدالة المتجهة $A(u)$ يعرف بالمقدار.

$$\frac{dA}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{A(u+\Delta u)-A(u)}{\Delta u}$$

بشرط وجود النهاية. وفي حالة $A(u) = A_3(u)i + A_2(u)j + As(u)k$ ، فإن:

$$\frac{dA}{du}=\frac{dA_1}{du}i+\frac{dA_2}{du}j+\frac{dA_3}{du}k$$

المشتقات من رتبة أعلى مثل d^2A/du^2 إلخ. يمكن تعريفها بالمثل.

3- إذا كانت $A(x,y,z) = A_1(x,y,z)i + A_2(x,y,z)j + A_3(x,y,z)k$، فإن:

$$dA=\frac{\partial A}{\partial x}dx+\frac{\partial A}{\partial y}dy+\frac{\partial A}{\partial z}dz$$

هو تفاضل المتجه A

4- مشتقات حاصل الضرب تخضع لقواعد مشابهة لتلـك الـدوال العدديـة. عنـد وجود حواصل الضرب المتجهة فالترتيب ربما يكون مهما. بعض الأمثلة.

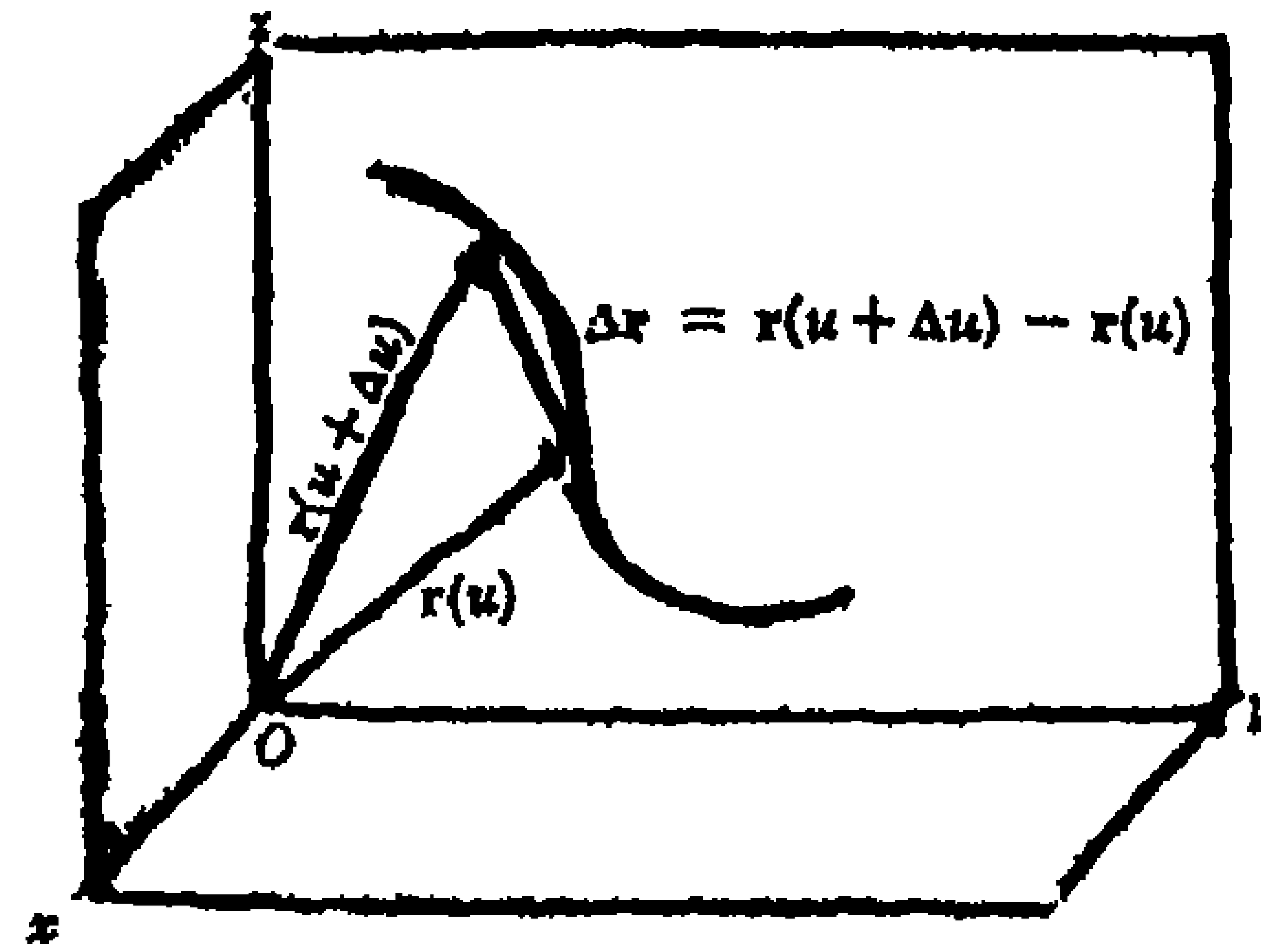
(أ) $\frac{d}{du}(\phi A)=\phi\frac{dA}{du}+\frac{d\phi}{du}A,$

(ب) $\frac{\partial}{\partial y}(A.B)=A.\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial y}.B,$

(جـ) $\frac{\partial}{\partial z}(A\times B)=A\times\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial z}\times B$

التفسير الهندسي لمشتقة المتجه:

إذا كان r هو المتجه الذي يصل بين نقطة الأصل 0 لنظـام إحداثـي والنقطـة (x,y,z)، حينئذ نوعية دالة المتجه r(u) تعرف z و y و x كدوال للمقـدار u. عندمـا تتغير u فإن النقطة النهائية للمتجهr تقطع منحنى في الفراغ (أنظر الشكل 7-8)لــه المعادلات البارامترية (متغير القيمة) وهي z=z(u) ، y = y(u) ، x=x(u). إذا كـان المتغير u هو طول القوس s المقيس من نقطة ثابتة على المنحنى،



شكل (1-8)

فإن:

$$\frac{dr}{ds}=T \qquad ....(9)$$

هو وحدة متجه في اتجاه المماس للمنحنى ويسمى وحدة الممـاس المتجـه. إذا كان u هو الزمن t. فإن:

$$\frac{dr}{dt}=v \qquad ....(10)$$

هو السرعة التي بها النقطة الأخيرة للمتجه r تقطع المنحنى، فيكون لدينا:

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}T=vT \qquad ....(11)$$

التي منها نرى أن مقدار المتجه v هو vds/dt. بالمثل:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=a \qquad ....(12)$$

هي العجلة التي بها النقطة الأخيرة للمتجه r تقطع المنحنى. هذه الأفكار لها تطبيقات هامة في علم الميكانيا والهندسية التفاضلية.

الانحدار، تباعد المتجهات، التفاف المتجه:

اعتبر العامل المؤثر المتجه ∇ (دل) يعرف بالآتي:

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z} \qquad ....(13)$$

حينئذ إذا كانت $\phi(x,y,z)$ و $A(x,y,z)$ لهم مشتقات جزئية أولى مستمرة في المنطقة (الشرط أن أحوال كثيرة تكون أقوى من الشرط الضروري)، يمكننا أن نعرف الآتي:

1- الانحدار:

الانحدار للدالة ϕ يعرف بالآتي:

$$\text{grad } \phi=\nabla\phi=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=i\frac{\partial\phi}{\partial x}+j\frac{\partial\phi}{\partial y}+k\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial z}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k \qquad ....(14)$$

وكتعليل ممتع له سبق هو أنه إذا كانت $\phi(x,y,z)=c$ هي معادلة السطح، فإن $\nabla\phi$ هو العمودي على هذا السطح (انظر مسألة رقم 36).

2- التباعد:

تباعد المتجه A يعرف بالآتي:

$$\text{div}=\nabla.A=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right).(A_1i+A_2j+A_3k)$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \qquad \text{..........(15)}$$

3- الالتفاف:

التفاف المتجه يعرف بالآتي:

$$\text{curl}A = \nabla \times A = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k$$

لاحظ أنه في فك المحدد، والعوامل المؤثرة $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ من الضروري أن تسبق A_1, A_2, A_3.

قوانين تحتوي على ∇ :

إذا كانت المشتقات الجزئية للمقادير A,B,U,V موجودة فرضا، فإن:

1- $\text{grad}(U+V) = \text{grad } u + \text{grad } V$ أو $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$

2- $\text{div}(A+B) = \text{div } A + \text{div } B$ أو $\nabla.(A+B) = \nabla.A + \nabla.B$

3- $\text{curl}(A+B) = \text{curl } A + \text{curl } B$ أو $\nabla \times (A+B) = \nabla \times A + \nabla \times B$

4- $\nabla.(UA) = (\nabla U).A + U(\nabla.A)$

5- $\nabla \times (UA) = (\nabla U) \times A + U(\nabla \times A)$

6- $\nabla.(A \times B) = B.(\nabla \times A) - A.(\nabla \times B)$

7- $\nabla\times(A\times B) = (B.\nabla)A - B(\nabla.A) - (A.\nabla)B + A(\nabla.B)$

8- $\nabla(A.B)=(B.\nabla)A+(A.\nabla)B+B\times(\nabla\times A)+A\times(\nabla\times B)$

9- $\nabla.(\nabla U)=\nabla^2U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}$ يسمى لإبلاسيان للمقدار U

$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ يسمى لابلاسيان العامل المؤثر.

10- $\nabla\times(\nabla U) = 0$ التفاف الانحدار للمقدار U = صفرا.

11- $\nabla.(\nabla\times A) = 0$ تباعد الالتفاف للمتجه A = صفرا.

12- $\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla.A)-\nabla^2A$.

التفسير المتجهي للجاكوبيان:

إحداثيات منحنى الأضلاع العمودية:

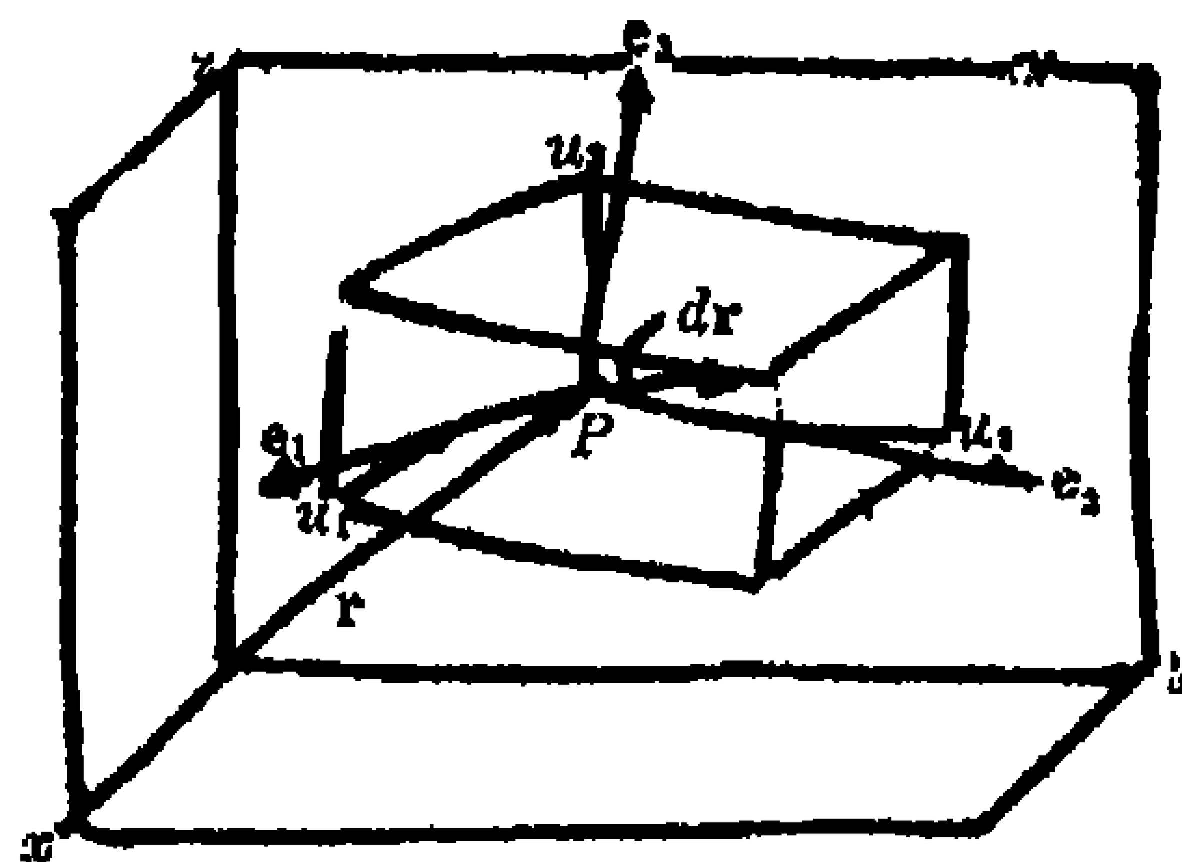
المعادلة المحولة:

$x = f(u_1,u_2,u_3),\ y(u_1,u_2,u_3),\ z=(u_1,u_2,u_3)$ ....(17)

[حيث افترضنا أن f,g,h دوال مستمرة ولها مشتقات جزئية وعكسها وحيد القيمة] تكون تناظرا أحاديا (واحدا لواحد) بين النقط في نظام إحداثي عمودي xyz، u_1,u_2,u_3. برموز المتجهات يمكن كتابة التحول (17) على الصورة.

$r = xi+ yj + 2k - f(u_1,u_2,u_3)i + g(u_1,u_2,u_3)j + h(u_1,u_2,u_3)k$ ......(18)

النقطة P في (شكل 7-9) يمكن تعريفها ليس فقط بالإحداثيات العمودية (x,y,z) ولكن أيضا بالإحداثيات (u_1u_2,u_3). تسمى الإحداثيات (u_1,u_2,u_3) إحداثيات منحنى الأضلاع للنقطة.



شكل (1-9)

إذا كانت u_2,u_3 مقدارين ثابتين إذن عندما تتغير u_1 فإن المتجه r يرسم منحى الذي سيسمى منحنى الإحداثيات بالمثل نعرف الإحداثيات u_2 و u_1 المارين بالنقطة P.

من (18) يكون لدينا:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial r}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial r}{\partial u_3}du_3 \qquad ....(19)$$

المتجه $\partial r/\partial u_2$ هو المماس لمنحنى الاحداثيات u_2 عند P. إذا كانت e_1 هي وحدة المتجهات عند P في هذا الاتجاه، فيمكننا كتابة $\partial r/\partial y_1=h_1 r_1$ حيث $h_1=|\partial r/\partial u_1|$. بالمثل يمكن كتابة $\partial r/\partial u_2 = h_2e_2$ و $\partial r/\partial u_3 = h_3e_3$ حيث $h_2=|\partial r/\partial u_2|$ و $h_3=|\partial r/\partial u_3|$ على الترتيب. حينئذ (19) يمكن كتابتها:

$$dx=j_1du_1e_1+h_2du_2e_2+h_3du_3e_3$$

الكميات h_1,h_2,h_3 أحيانا نسمي عوامل عددية:

إذ كانت e_1,e_2,e_3 عمودية متبادلة عند أي نقطة P، فإن إحداثيات منحنى الأضلاع تسمى متعامدة. وفي مثل هذه الحالة عنصر طول القوس ds يعطى بالعلاقة:

$$ds^2=dr.dr=h_1^2du_1^2+h_2^2du_2^2+h_2^2du_3^2 \qquad ....(21)$$

وتناظر مربع طول قطر متوازي السطوح السابق.

أيضا في حالة الإحداثيات العمودية فإن حجم متوازي السطوح يعطى بالصورة.

$$dV=|(h_1du_1e_1).(h_2du_2e_2)\times(h_3du_3e_3)| = h_1h_2h_3du_1du_2du_3 \quad ....(22)$$

الذي يمكن كتابة على الصورة:

$$dV=\left|\frac{\partial r}{\partial u_1}.\frac{\partial r}{\partial u_2}\times\frac{\partial r}{\partial u_3}\right|du_1du_2du_3=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3 \quad ....(23)$$

حيث $\partial(x,y,z) / \partial(u_1,u_2,u_3)$ هي الجاكوبيان للتحول.

من الواضح عند تلاشي الجاكوبيان فلا يوجد متوازي السطوح وتفسر هندسيا دلالة تلاشي الجاكوبيان.

انحدار تباعد، التفاف، لابلاسيان في إحداثيات منحنى الأضلاع العمودي:

إذا كانت ϕ دالة عددية $A=A_1e_1+Ae_2+A_3e_3$ دالة متجهة لها إحداثيات منحنى الأضلاع العمودي وهي u_1,u_2,u_3 فيكون لدينا النتائج الآتية:

1- $$\nabla\phi=\phi \text{ انحدار } =\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}e_1+\frac{1}{h2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}e_2+\frac{h}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}e_3$$

2- $$\nabla.A=A \text{ تباعد } =\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

3- $$\nabla\times A = A \text{ التفاف } =\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1e_1 & h_2e_2 & h_3e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

4- $$\nabla^2\phi=\phi \text{ لابلاسيان } =\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_2h_1}{\partial u_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

وهذه تختصر إلى التعبيرات العادية في الإحداثيات العمودية فإذا وضعنا بدلا من (u_1,u_2,u_3) المقدار (x,y,z) وبدلا من e_1,e_2,e_3 المقادير k و i,j على الترتيب بوضع $h_1=h_2=h_3=1$.

إحداثيات منحنى الأضلاع الخاصة:

1- إحداثيات اسطوانية: (ρ, ϕ, z) شكل (1-10) معادلات تحول:

$$x = \rho \cos\phi,\ \ y = \sin \phi,\ \ z = z$$

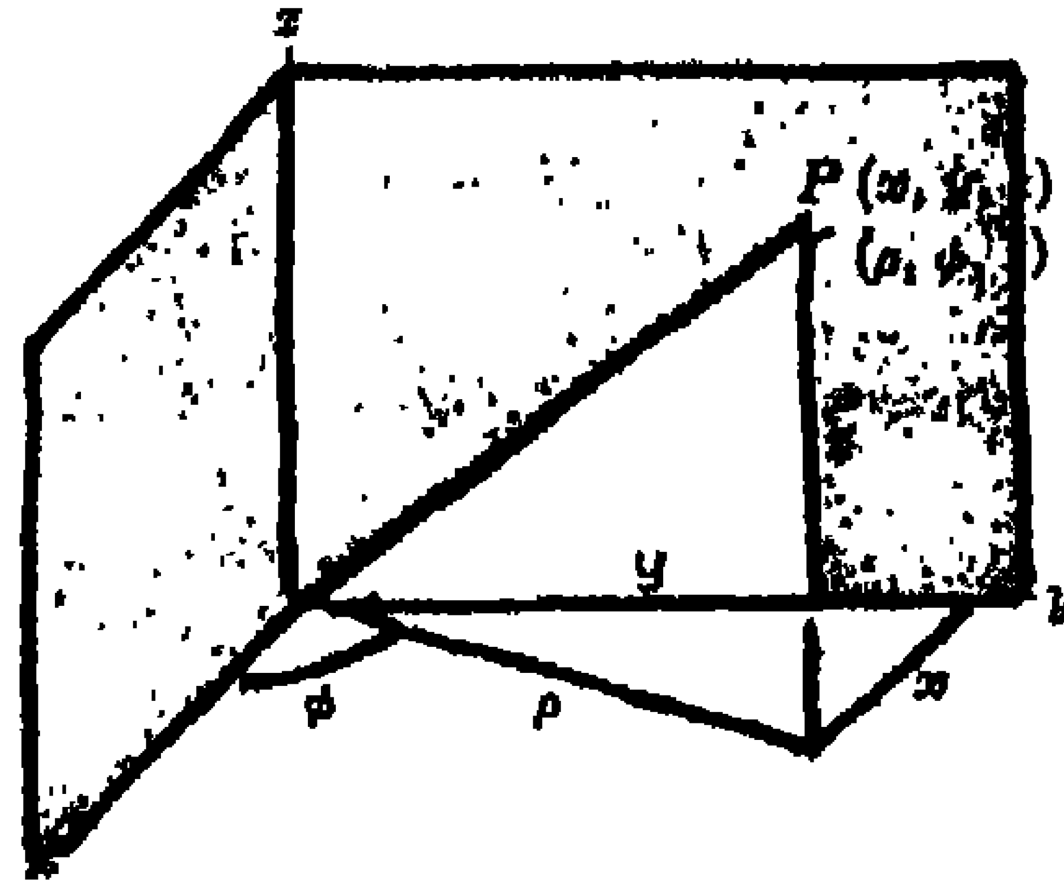
حيث $\rho \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi, -\infty < z < \infty$

عوامل عددية: $h_1=1,\ h_2=\rho,\ h_2=1$

عنصر طول القوس: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi + dz^2$

جاكوبيان: $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)} = \rho$

عنصر الحجم : $dV = \rho d\ \rho d\phi\, dz$



شكل (1-10)

لابلاسيان:

$$\nabla^2 U = \frac{I}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2 \partial\phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

لاحظ النتائج المناظرة يمكن الحصول عليها بإحداثيات قطبية في المستوى وذلك بحذف z التابعة. وفي مثل هذه الحالة مثال ذلك $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$ بينما عنصر الحجم يوضع بدلا منه عنصر المساحة $dA = \rho d\rho d\phi$.

2- الإحدثيات الكروية: (r, θ, ϕ). انظر (شكل 1-11).

المعادلة المحولة:

$$x = r \sin \theta \cos \phi,\ y = r \sin \theta \sin \phi,\ z = r \cos \theta$$

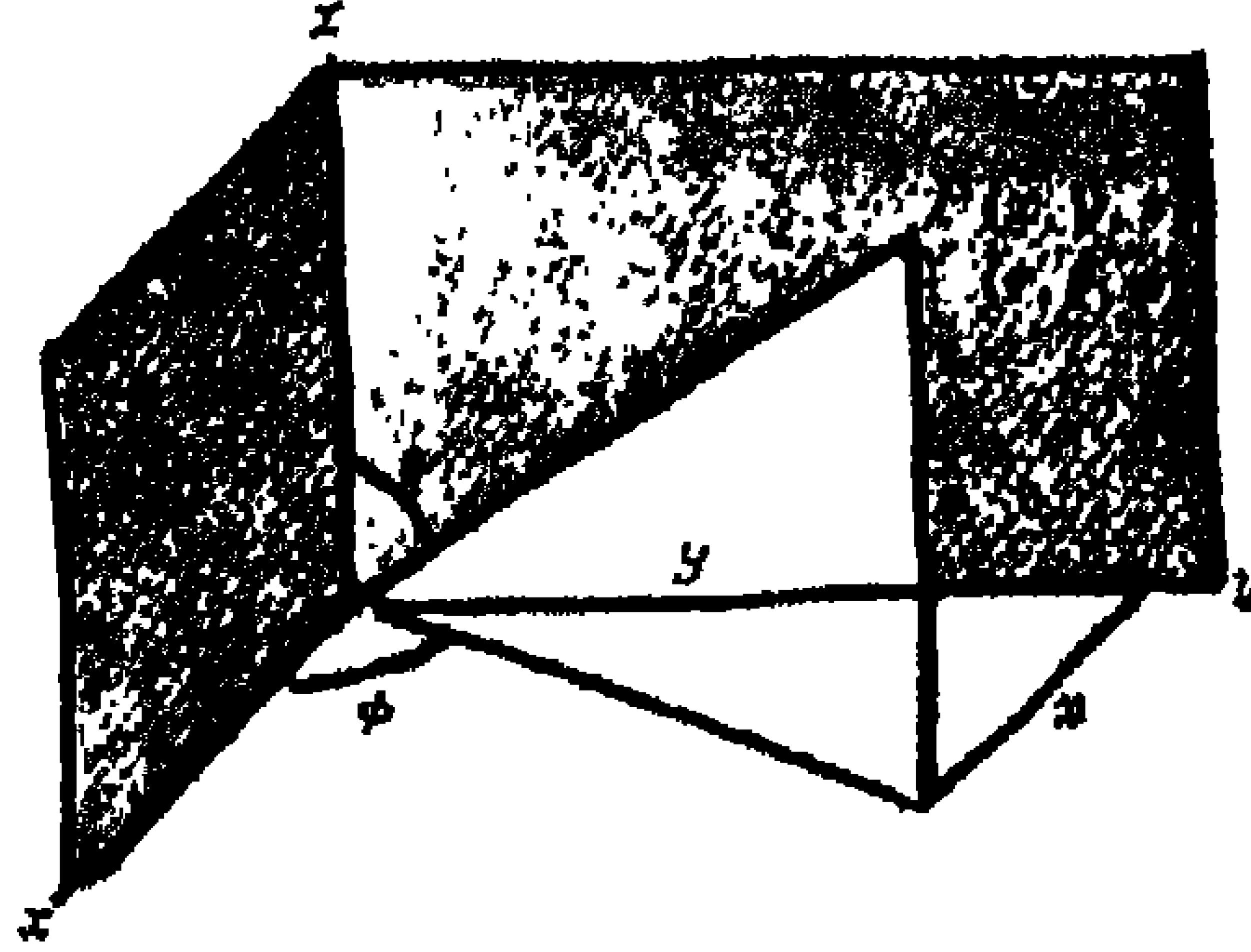
حيث $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$

عوامل عددية: $h_1=1,\ h_2=r,\ h_3 = r \sin\theta$

عنصر طول القوس: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = r^2 \sin^2\theta\, d\phi$

جاكوبيان: $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \rho$

عنصر الحجم: $dV = r2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$



شكل (1-11)

لابلاسيان: $\nabla^2 U = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}$

أنواع أخرى من نظم الإحداثيات تكون ممكنة.

مسائل محلولة

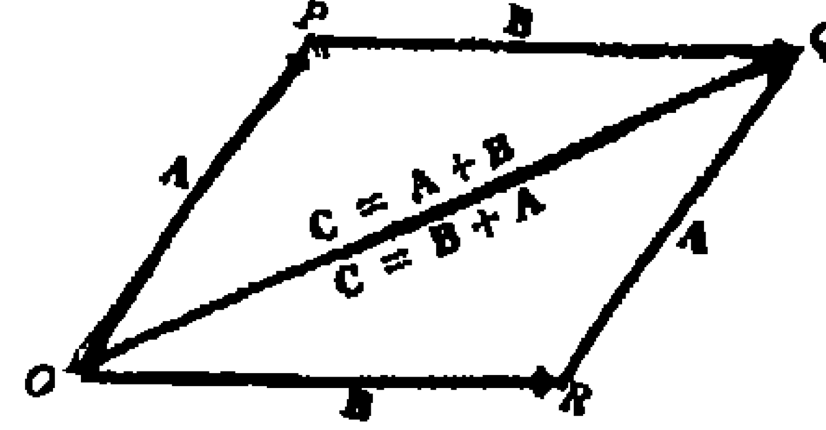
جبر المتجهات:

1- بين أن جمع النهايات تبديلية أي أن A+B = B+A. أنظر (شكل (1-12) أسفل.

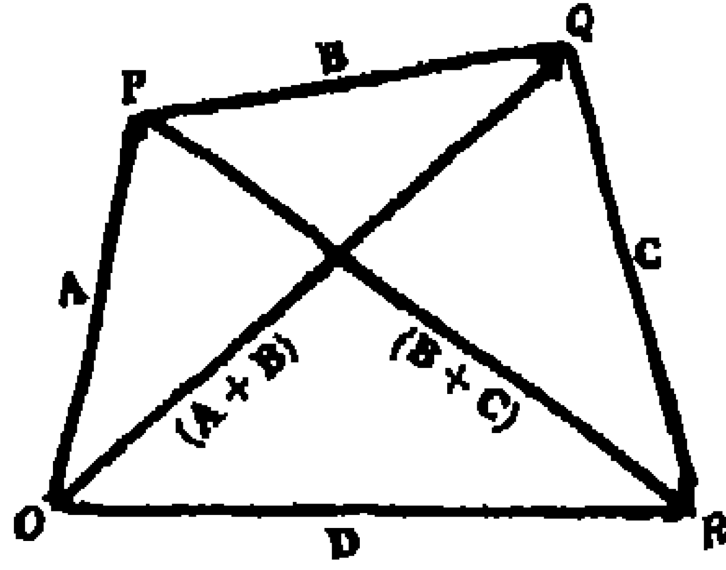
OP + PQ = OQ أو A+B = C

OR + RQ = OQ أو B+A = C

إذن A + B = B+A



شكل (1-12)



شكل (1-13)

2- وضح أن جمع المتجهات ترافقية أن A+(B+C) = (A+B) +C انظر (شكل 1-13) أعلى.

OP + PQ = OQ = (A+B) أو PQ + QR = PR = (B+C)

بما أن A + (B+C) = D أي أن OP + PR = OR = D

(A +B) + C=D أي أن OQ + QR = OR =D

يكون لدينا A + (B+C) = (A+B)+C

وامتداد النتائج للمسألتين 1و2 توضح أن رتبة الجمع لأي عدد من المتجهات غير مهم.

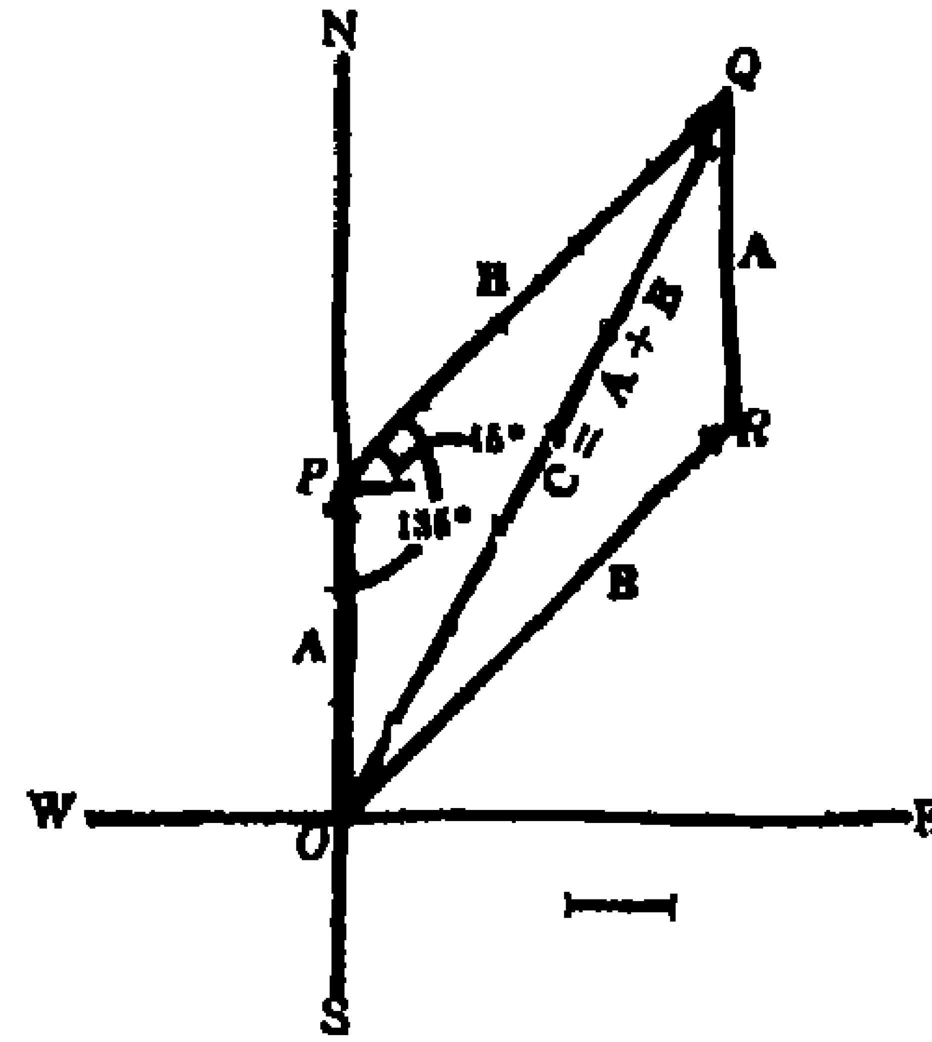
3- عربة تقطع 3km جهة الشمال، ثم 5km شمال شرق كما هـو موضـح (بشـكل 1-14). مثل هذه الإزاحات بالرسم وحدة محصلة الإزاحة: (أ)بالرسم، (ب) بالتحليل.

المتجه OP أو A يمثل إزاحة 3km جهة الشمال.

المتجه PQ أو B يمثل إزاحة 5km شرق الشمال.

المتجه OQ أو C يمثل محصلة الإزاحة أو مجموع المتجهين B و A أي أن C=A+B. هذا قانون المثلث لجمع المتجه.

المتجه المحصل OQ يمكن أيضا الحصول عليه بعمل قطر متوازي الأضلاع PQR حيث المتجه OP = A و OR (مساو للمتجه OPQP حيث المتجه OP=A و OR (مساو للمتجه PQ أو المتجه B) كضلعين من متوازي الأضلاع. هذا هو قانون متوازي أضلاع القوى لجمع المتجه.



شكل (1-14)

الوحدة = واحد كيلومتر

أ) تعيين المحصلة بالرسم. يوضع وحدة 1km على المتجه OQ نجد أن طوله =7.4 km (تقريبا) الزاوية EOQ=61.5° باستعمال المنقلة. إذن المتجه OQ مقداره 7.4km واتجاهه 61.5° شمال الشرق.

ب) تعيين المحصلة تحليليا. من المثلث OPQ الذي يمثل مقدار المتجهات A,B,C بالأضلاع A,B,C، وباستعمال قانون جيب التمام.

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\angle OPQ =3^2+5^2-2(3)(5)\cos 135°=34+15\sqrt{2} = 55.21$$

$C = 7.43$ (تقريبا)

ومن قانون الجيب $\dfrac{A}{\sin\angle OQP}=\dfrac{C}{\sin\angle OPQ}$

فإن $\sin\angle OQP=\dfrac{A\sin\angle OPQ}{C}=\dfrac{3(0.707)}{7.43}=0.2855$ $\angle OPQ=16°35,$

إذن المتجه OQ مقداره 7.43 واتجاهه $61°35 = (16°35 + 45°)$ شمال شرق.

4- أثبت أن إذا كانت b,a متجهين ليسا في مستوى واحد، إذن $xa=yb=0$ تتضمن $x = y = 0$.

بفرض أن $x \neq 0$، إذن $xa + yb = 0$ تدل على أن $xa = -yb$ أو $a = -(y/x)b$ بأي أن المتجهين من الضروري أن يكونا متوازيين في نفس الخط (خط واحد) وهذا يخالف الفرض. إذن $x=0$، وتكون $yb=0$ التي منها $y = 0$.

5- إذا كانت $x_1a + y_1b = x_2a + y_2b$ ، حيث b,a متجهين ليسا في مستوى واحد فإن $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$ يمكن كتابة $x_1a+y_1b = x_2a + y_2b$ على الصورة:

$x_1a + y_1b-(x_2a+y_2b)=0$ أو $(x_1-x_2) a + (y_1-y_2)b =0$

ومن (مسألة رقم 4) $x_1-x_2=0, y_1-y_2 = 0$ أو $x_1=x_2, y_1 = y_1$.

والامتداد ممكن (انظر مسألة 49)

6- برهن أن قطري متوازي المستطيلات ينصف كل منهما الآخر. نفرض أن ABCD متوازي أضلاع حيث قطرية يتقاطعان عند P

كما يتضح من الشكل (1-15).

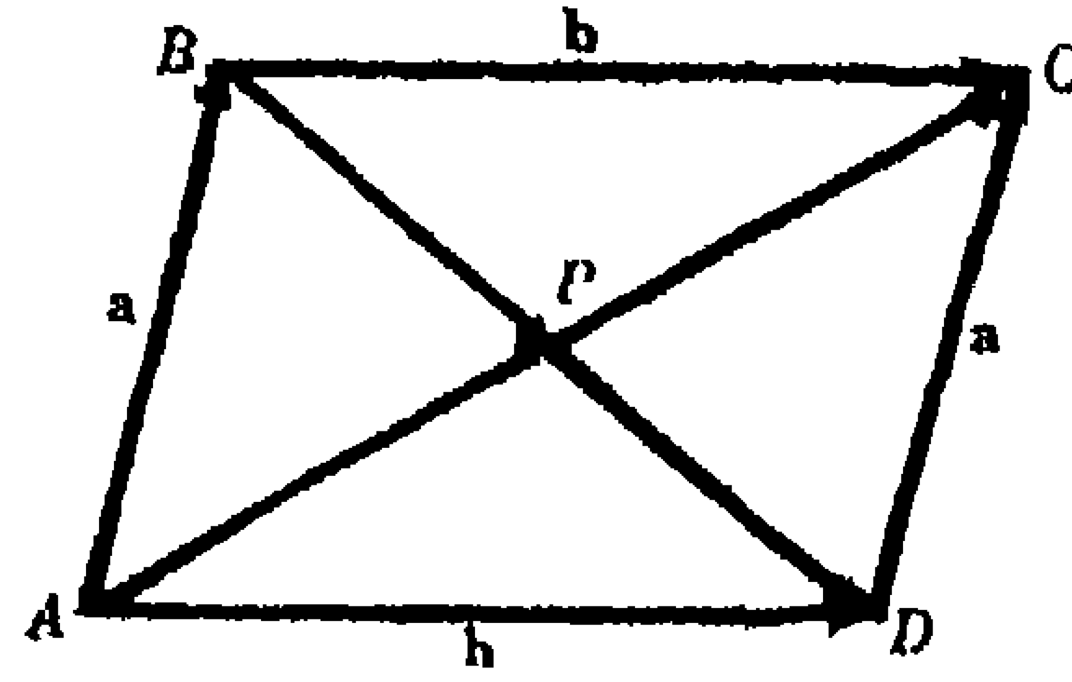
بما أن $BD + a = b, BD = b-a$ إذن $BP=x (b-a)$

وحيث $AC=a + b, AP= y(a+b)$

لكن $AB = AP+ PB = AP-BP$

أي أن $a=y (a+b) - x(b-a) = (x+y) a+(y-x)b$

وبما أن b,a ليسا متجهين على خط واحد فمن مسألة رقم 5 يكون $x+y=1$، $y-x=0$ أي أن $x=y= 1/2$، وتكون P هي النقطة المتوسطة لكلا القطرين.



شكل (1-15)

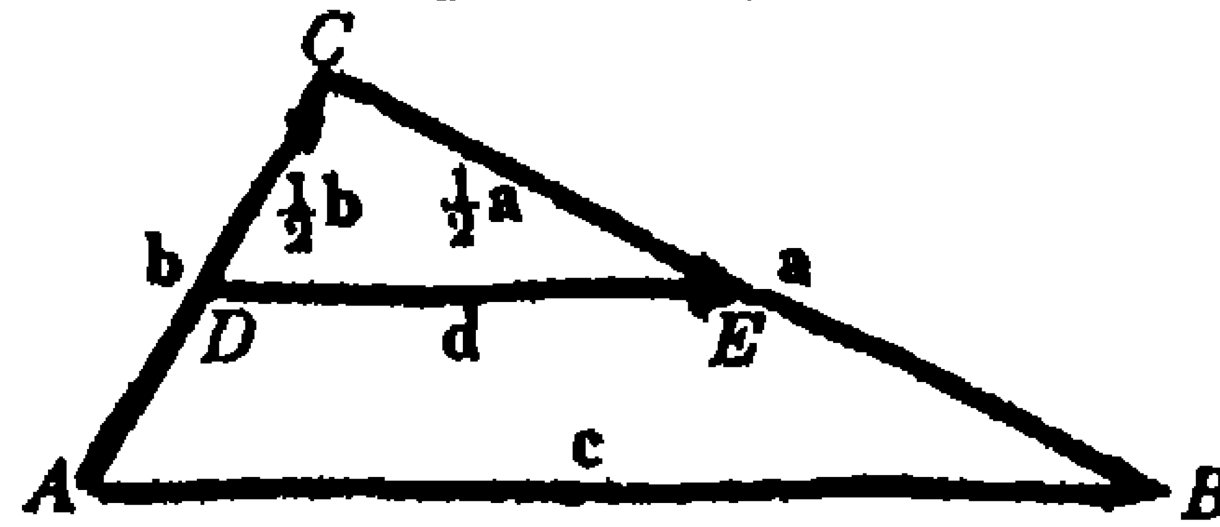
7- أثبت أن الخط الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.

من الشكل 1-16 $AC + CB = AB$ أو $b+a = c$

بفرض $DE = d$ هو الخط المستقيم الواصل بين منتصفي AC، CB. فيكون:

$$d=DC + CE = \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(b+a)=\frac{1}{2}c$$

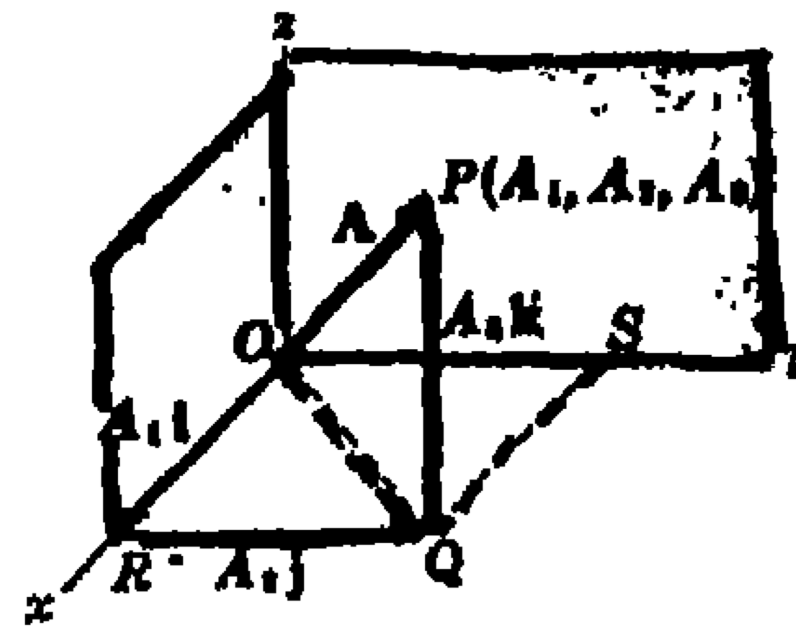
أي أن d موازيا للمتجه c ويساوي نصفه في الطول.



شكل (1-16)

8- أثبت أن مقدار الطول A للمتجه $A= A_1i + A_2j + A_3k$ هو :

$A =\sqrt{A_1^2 +A_2^2 +A_3^2}$ انظر (شكل (1-17)



شكل (1-17)

بنظرية فيثاغورس: $(\overline{OP})^2=(\overline{OQ})^2+(\overline{QP})^2$

حيث $\overline{OP}$ يشير إلى مقدار الطول للمتجه OP إلخ.

بالمثل $(\overline{OQ})^2=(\overline{OR})^2+(\overline{RQ})^2$

إذن $(\overline{OP})^2=(\overline{OR})^2+(\overline{RQ})^2+(\overline{QP})^2$ أو $A^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2$

أي أن: $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$.

9- حدد المتجه التي نقطته الابتدائية هي $P(x_1,y_1,z_1)$ ونقطته الأخيرة هي $A(x_2,y_2,z_2)$ وأوجد طوله. انظر شكل (1-18).

متجه الموضع للنقطة P هي $r_1=x_1i+y_2j+z_1k$

متجه الموضع للنقطة Q هي $r_2=x_2i+y_2j+z_2k$

أو $r_1+PQ=r_2$

$$PQ=r_2-r_1=(x_2i+y_2j+z_2k)-(x_1i+y_1j+z_1k)$$

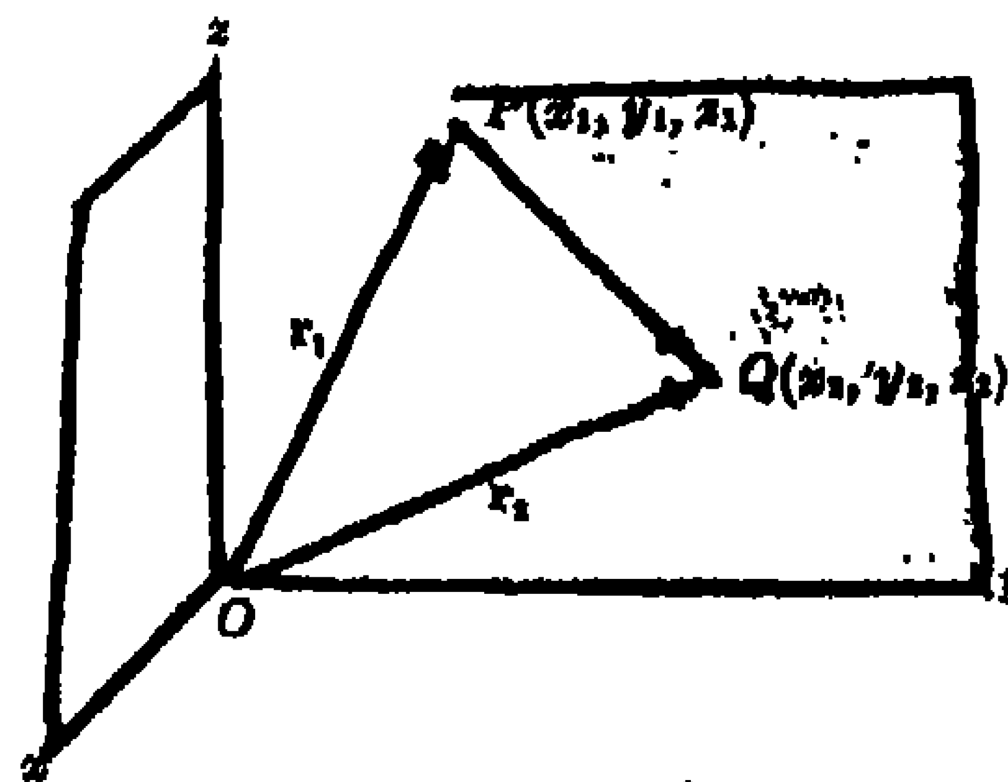
$$=(x_2-x_1)\,i+(y_2-y_1)\,j+(z_2-z_1)k$$

طول المتجه

$$PQ=\overline{PQ}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y2-y1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

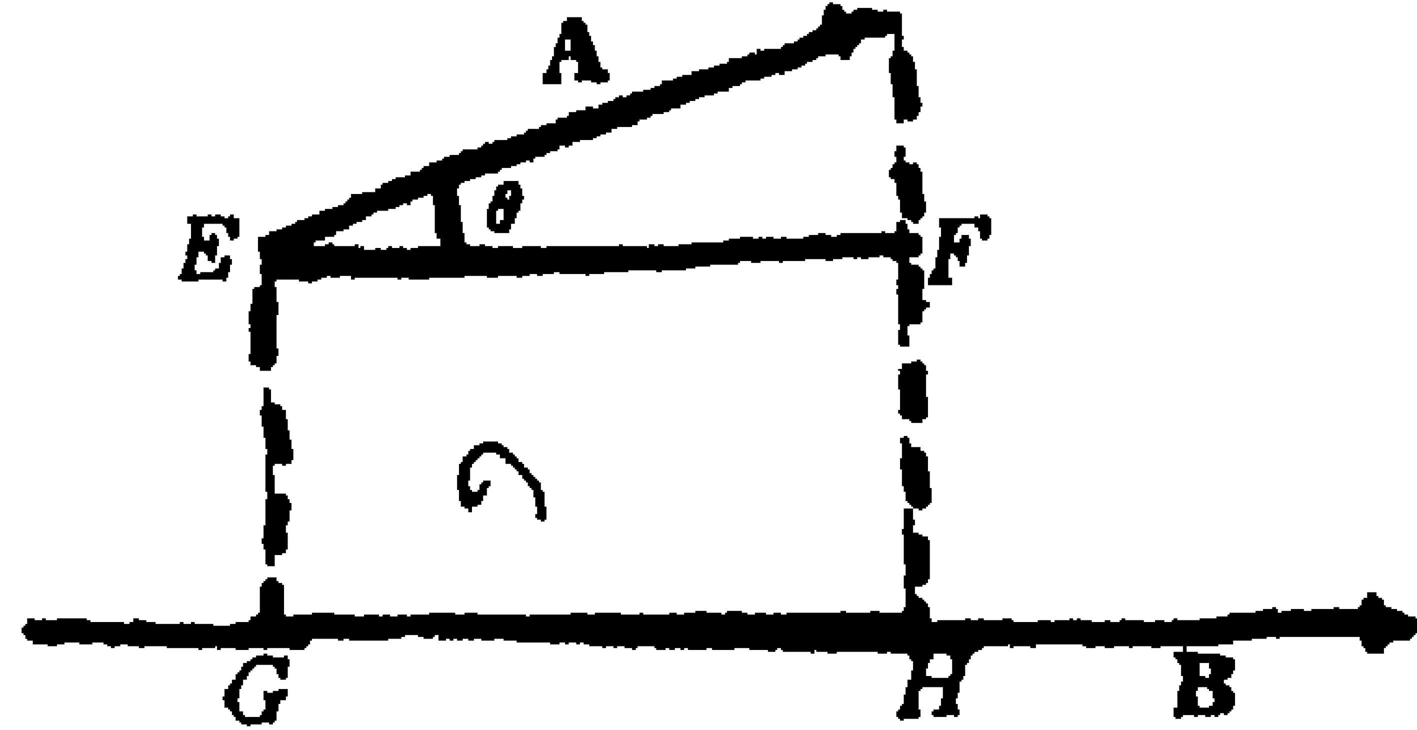
لاحظ أن هذا المسافة بين النقطتين P و Q.



شكل (1-18)

ضرب النقطة أو الضرب العددي:

10- أثبت أن مسقط المتجه A على المتجه B مساوياً A.b حيث b هو وحدة المتجه في اتجاه المتجه B.

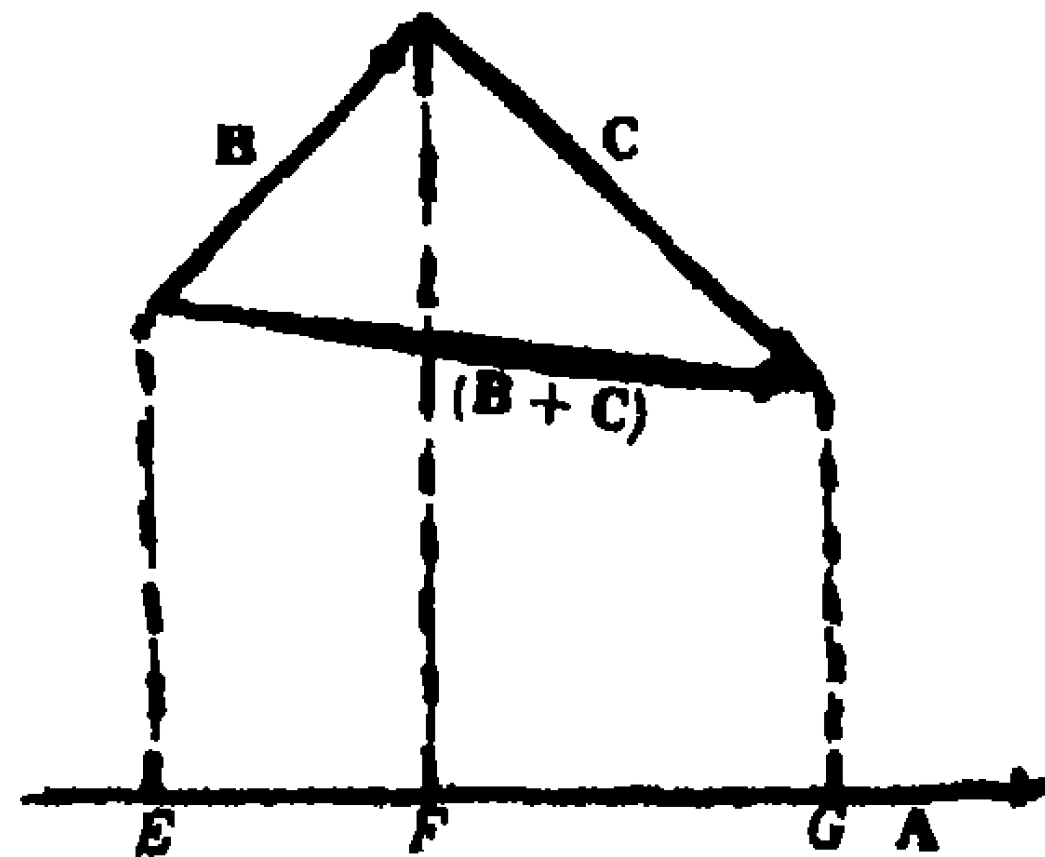


شكل (1-19)

من خلال النقطتين الابتدائية والأخيرة للمتجه A نمرر مستويين عموديين على المستوى B عند G وH على الترتيب كما في الشكل المجاور 1-19؛ فإن:

مسقط المتجه A على $B=\overline{GH}=\overline{EF}=A\cos\theta=A.b$

11- أثبت أن $A.(B+C) = A.B + A.C$



شكل (1-20)

نفرض أن المتجه a هو وحدة المتجه في اتجاه المتجه A، فإن مسقط المتجه (A+C) على المتجه A = مسقط المتجه B على المتجه A + مسقط المتجه C على المتجه A.

$(B+C).\ a = B.a + C.a$

بالضرب في طول A

$(B+C) . Aa = B.Aa + C.Aa$

$(B+C). A = B.A + C.A$

وباستعمال قانون التبديل للضربيات العددية فإن:

$A .(B+C) = A.B+ A.C$

وقانون التوزيع يكون صحيحاً.

12- أثبت أن: $(A+B) . (C+D) = A.C + A.D + B.C+B.D$

من مسألة رقم (11):

$(A+B).(C+D) = A.(C+D) + (B.(C+D) = A.C+A.D+B.C+B.D$

القوانين العادية للجبر صحيحة للضربيات العددية.

13- أوجد قيمة كل من الآتي:

أ) $i.i = |i| |i| \cos 0° = (1) (1)(1) = 1$

ب) $i.k = |i| |k| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

جـ) $k.j = |k| |j| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

د) $j. (2i-3j+k) = 2j.j + 3j.j+ j.k = 0-3+0= -3$

هـ) $(2i-j).(3i+k)=2i.(3i+k)-j.(3i+k)=6i.i+2i.k-3j.i-j.k= 6+ 0 - 0 - 0 = 6$

14- إذا كانت $A= A_1i + B_2j + A_3k$ و $B= B_1i + N_2j + B_3k$

فأثبت أن: $A.B= A_1B_1+ A_2B_2 + A_3B_3$.

$A .B = (A_1i+A_2j+A_3k). B_1i+B_2j+B_3k)$

$= A_1i. (B_1i+B_2j+B_3k)+A_2j.(B_1i+B_2j+B_3k) + A_3k.(B_1i+B_2j+B_3k)$

$= A_1B_1i.i + A_1B_2i.j+A_1B_3i.k+A_2Bj.i+ A_2B_2j.j+A_2B_3j.k+ A_3B_1k.i$
$+ A_3B_2k.j + A_3B_3k.k$

$=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$

حيث $i.i = j.j = k.k = 1$ وكل حواصل الضرب العددي الأخرى مساوية صفرا.

15- إذا كانت $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ نوضح أن $A = \sqrt{A.A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

$A.A = (A)(A) \cos 0° = A^2$ إذن $A = \sqrt{A.A}$

أيضا:

$$A.A = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) . (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

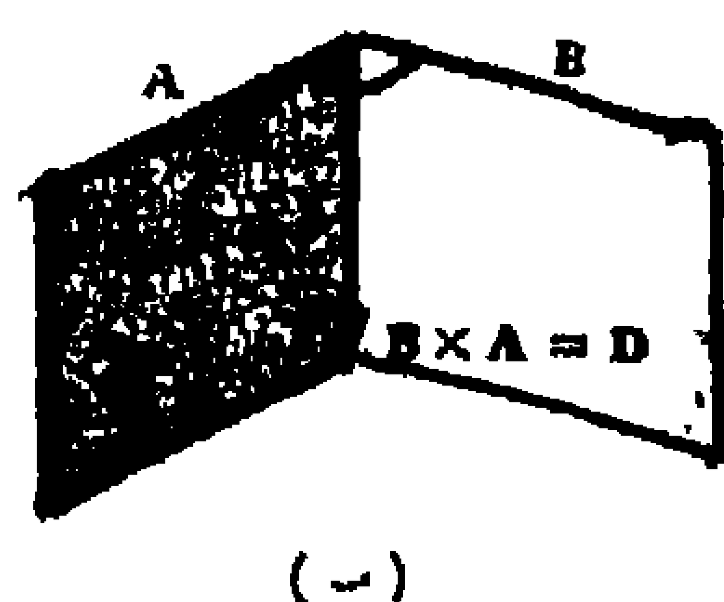
$$= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

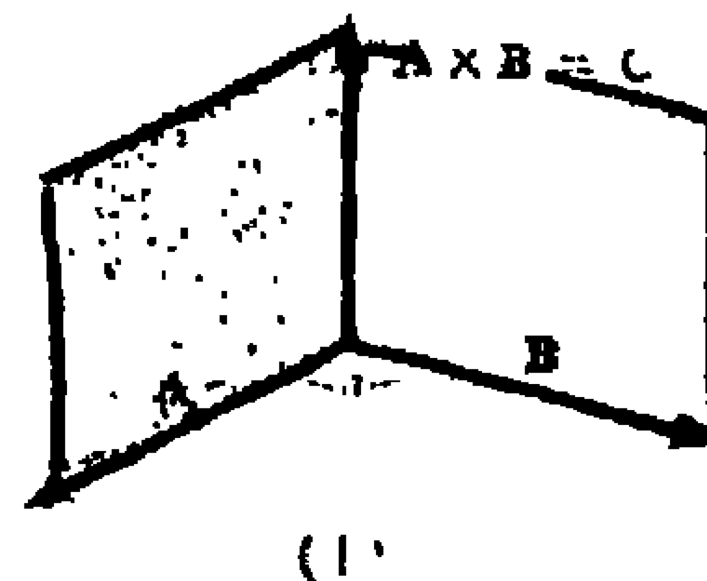
باستخدام مسألة رقم (14)، بأخذ $B = A$.

إذن $A = \sqrt{A.A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ هو طول المتجه A أحيانا $A.A$ يكتب A^2.

الضرب المتجه:

16- أثبت أن $A \times B - B \times A$.





شكل (1-21)

المتجه $A \times B = C$ طوله $AB \sin\theta$ واتجاهه بحيث أن C.B.A يكون نظاما يمينيا [شكل 1-21) (a) أعلى].

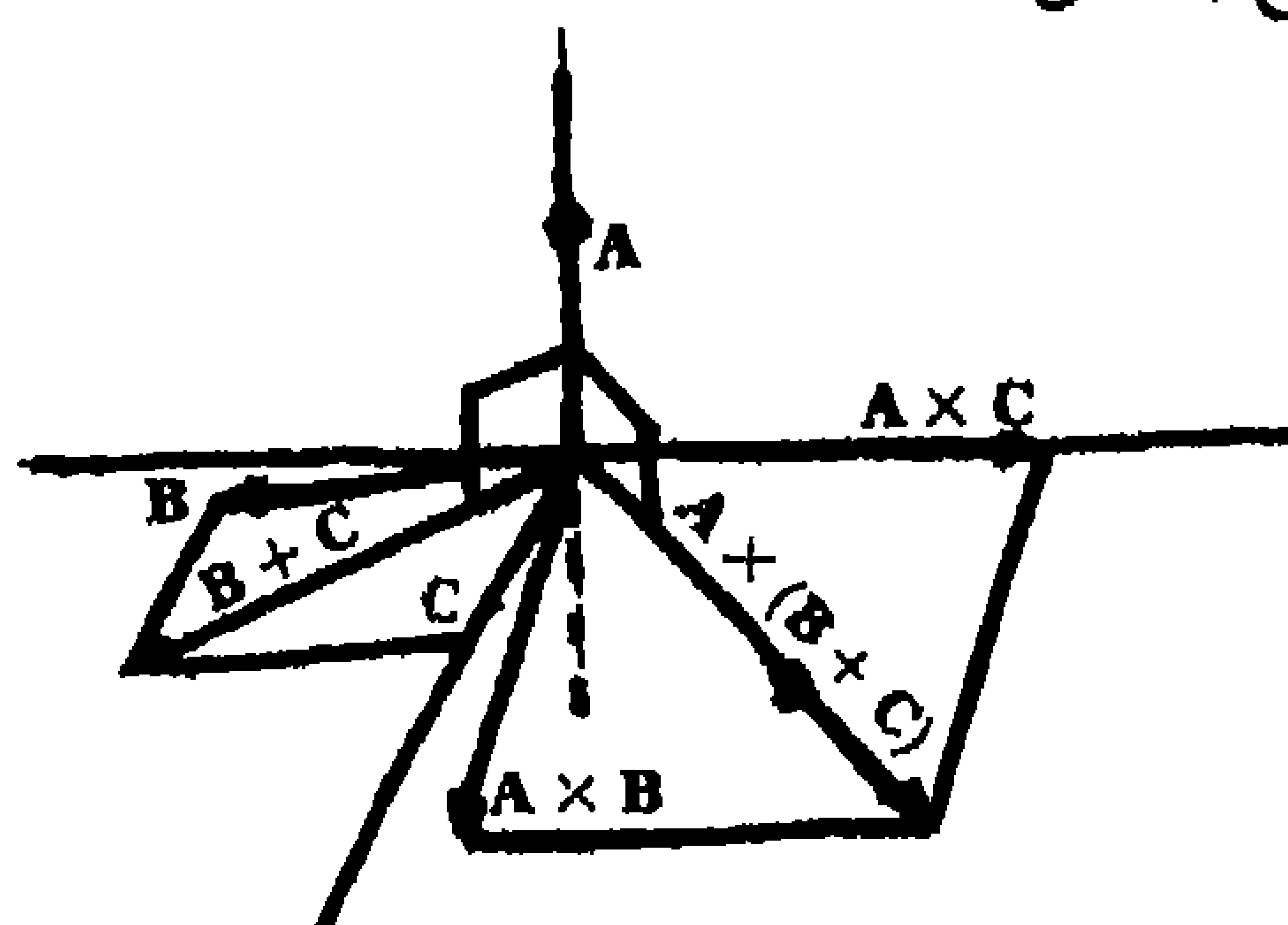
المتجه $B \times A = D$ طوله $B A \sin \theta$ واتجاهه بحيث أن D,A,B يكون نظاما يمينيا [شكل 1-21 (b) أعلى].

حينئذ D له طول المتجه نفسه C لكن مضادا في الاتجاه، أي اأن $C = -D$ و أو $A \times B = -B \times A$.

قانون التبديل لحواصل الضرب المتجهة ليست صحيحة.

17- أثبت أن $A\times (B+C) = A\times B+A\times C$ لحالة حيث A عمودي على B وأيضاً على C.

بما أن المتجه A عمودي على المتجه B، المقدار $A\times B$ هو متجه عمودي على المستوى AوB وطوله عددياً هو $AB \sin 90°=AB$ أو طول المقدار AB. وما يكون مكافئاً لضرب المتجه B بالمقدار العددي A ودوران المحصلة المتجهة خلال 90° إلى الموضع كما هو موضح بشكل (1-22)



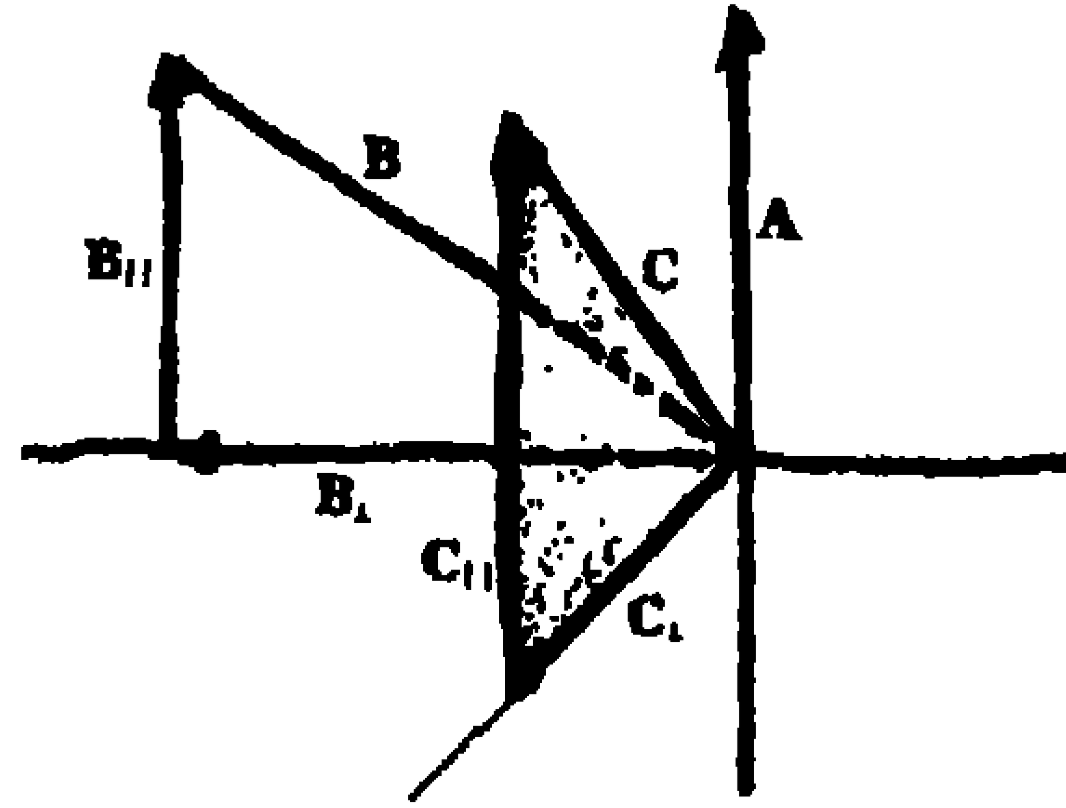
شكل (1-22)

بالمثل المقدار $A\times C$ هو متجه يمكن الحصول عليه بضرب المتجه C بالمقدار العددي A ودوران المحصلة المتجهة خلال 90° إلى الموضع الموضح.

وبطريقة مشابهة المقدار $A\times(B+C)$ هو متجه يمكن الحصول عليه بضرب المتجه C+ العددي A ودوران المحصلة المتجه خلال 90° إلى الموضع الموضح.

بما أن $A\times(B+C)$ هو قطر متوازي الأضلاع أضلاعه كمتجهات هي $A\times B$و $A\times C$ يكون لدينا $A\times(B+C) =A\times B+A\times C$.

18- أثبت أن $A\times(B+C) = A\times B+A\times C$ في الحالة العامة حيث المتجهات C و Bو A ليست في مستوى واحد. أنظر شكل (1-23).



شكل (1-23)

بتحليل المتجه B إلى مركبتين متجهتين إحداهما عمودية على المتجه A والأخرى موازية للمتجه A وسنرمز لهما بالمتجهين .B. B_{11} على الترتيب. إذن $.B=B+B_{11}$

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين A،B فإن $B1= B \sin \theta$. إذا طول المتجه $A\times B_1$ هو $AB \ \sin \theta$ والطول يساوي طول المتجه نفسه $A\times B$. أيضا الاتجاه للمقدار $A\times B$ يكون في نفس الاتجاه للمقدار $A\times B$ إذن $A\times B_1 = A\times B$.

بالمثل إذا كانت C قد حللت إلى مركبتين متجهتين C_1،C_{11} موازيين وعموديين على الترتيب للمتجه A، وحينئذ $A\times C_1 = A\times C$.

أيضا، بما أن $B+C=B_1+B_{11}+C_1+C_{11}=(B_1+C_1)+(B_{11}+C_{11})$ ويترتب على ذلك أن :

$$A\times(B_1+C_1) = A\times(B+C)$$

الآن B_1 و C_1 متجهين عموديين على A وأيضا من مسألة رقم 17:

$$A\times(B_1+C_1) = A\times B_1+A\times C_1$$

إذن :

$$A\times(B+C) = A\times B+A\times C$$

وقانون التوزيع صحيح، بالضرب في (-1) وباستعمال مسألة رقم، هذا يصبح $(B+C) = B\times A + C\times A$ لاحظ أن ترتيب العوامل في الضرب المتجه يكون

هاماً. القوانين العادية في الجبر تستعمل فقط إذا كانت الترتيب الملائم الصحيح محافظاً عليه.

19- إذا كان $A=A_1i+A_2j+A_3k$ و $B=B_2j+B_2j+B_3k$ أثبت أن:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

$$A.B=(A_1i+A_2j+A_3k).B_1i+B_2j+B_3k)$$

$$=A_1i\times(B_1i+B_2j+B_3k)+A_2j\times(B_1i+B_2j+B_3k)+A_3k\times(B_1i+B_2j+B_3k)$$

$$=A_1B_1i\times i+A_1B_2i\times j+A_1B_3i\times k+A_2Bj\times i+A_2B_2j\times j+A_2B_3j\times k+$$
$$A_3B_1k\times i+A_3B_2k\times j+A_3B_3k\times k$$

$$=(A_2B_2-A_3B_2)i+(A_3B_1-A_1B_3)j+(A_1B_2-A_2B_1)k=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

20- إذا كان $A=3i-j+2k$ و $B=2i+3j$ فأوجد $A\times B$.

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5i+7j+11k$$

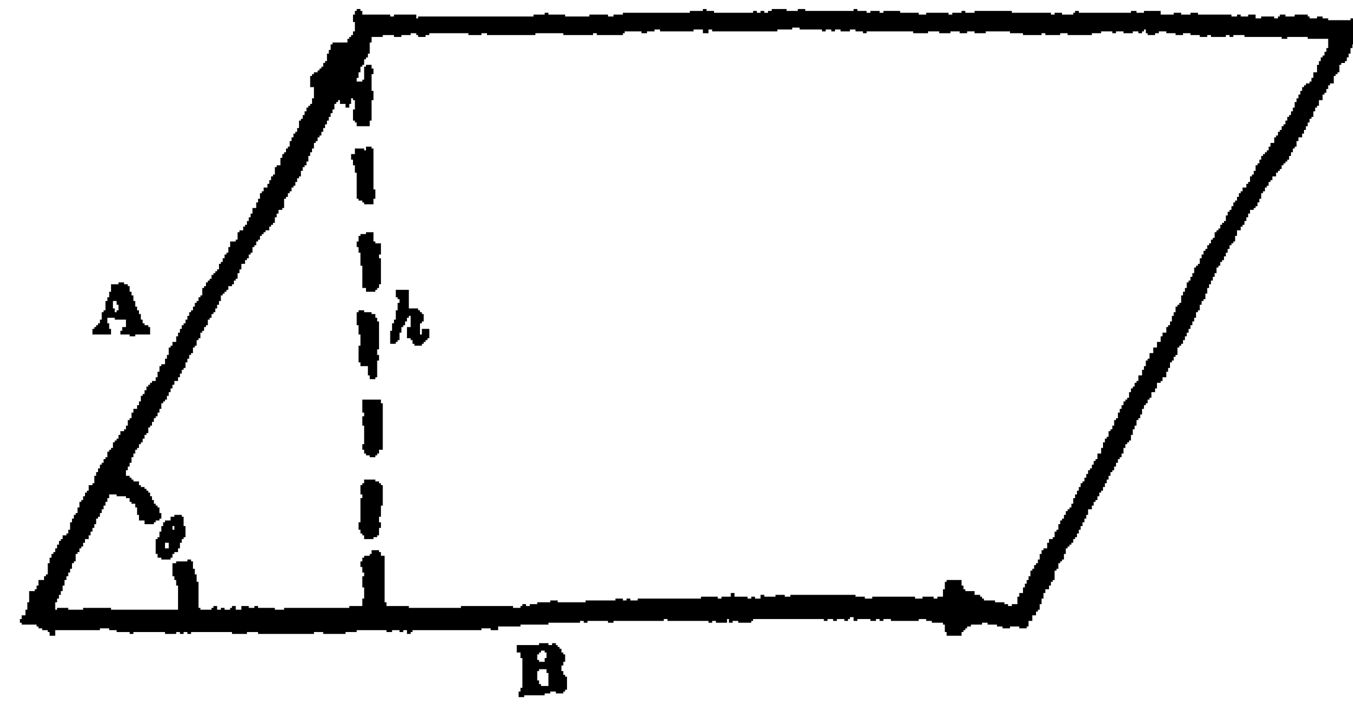
21- أثبت أن مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجهان A وB هي $|A\times B|$.

مساحة متوازي الأضلاع $|B|$ A=

$=|A|\sin\theta\,|B|$

$=|A\times B|$

لاحظ أن مساحة المثلث الذي ضلعاه المتجهان A ، B يساوي $\frac{1}{2}|A\times B|$



شكل (1-24)

22- أوجد مساحة المثلث التي رؤوسه عند النقطة P(2,3,5), Q(4,2,-1) R(3,6,4)

$$PQ = (4-2)i + (2-3)j + (-1-5)k = 2i-j-6k$$

$$PR = (3-2)i + (6-3)j + (4-5)k = i+3j-k$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2}|PQ\times PR| = \frac{1}{2}(2i-j-6k)\times(i+3j-k)|$$

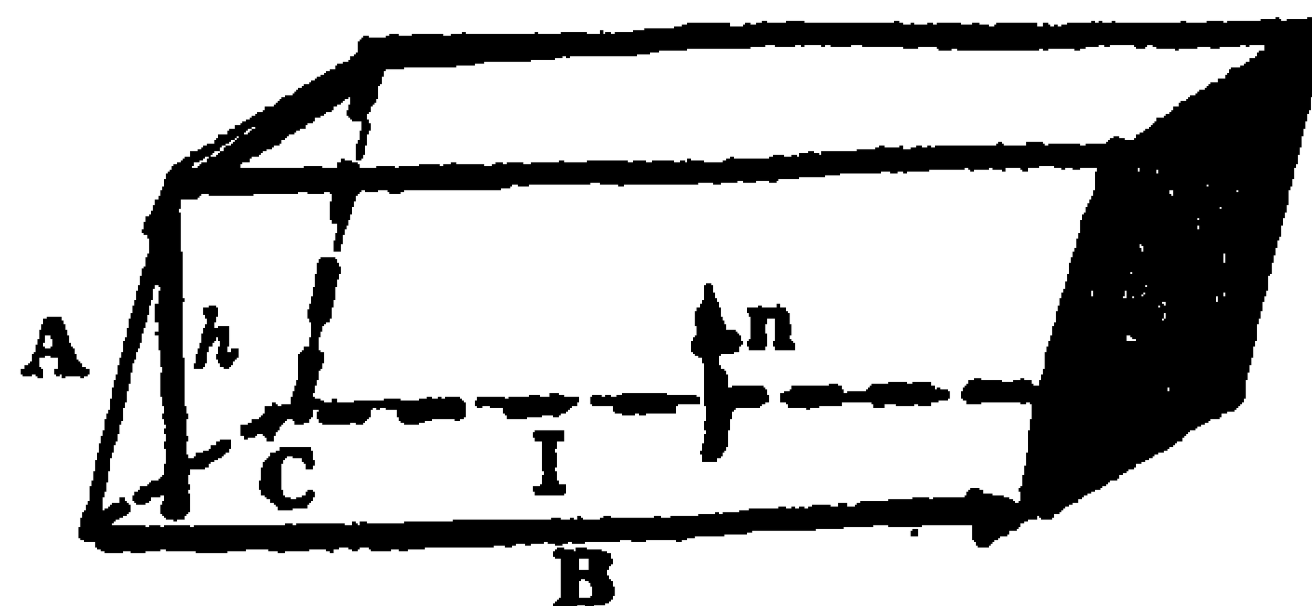
$$=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|191-4j+7k|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(19)^2+(-4)^2+(7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{426}$$

حواصل الضرب الثلاثية:

23- وضح أن $A.(B\times C)$ قيمتها المطلقة مساوية لحجم متوازي السطوح التي أضلاعه المتجهات Cو B و A.

نفرض المتجه n هي الوحدة العمودية على متوازي الأضلاع I، وله اتجاه المقدار $B\times C$ ونفرض أيضاً h هو ارتفاع النقطة النهائية من المتجه A فوق متوازي الأضلاع I .



شكل (1-25)

حجم متوازي السطوح = (الارتفاع h) (مساحة متوازي الأضلاعI).

$=(A.n)\ (|B\times C|)$

$= A.\{|B\times C|n\}\ A.(B\times C)$

إذا كان A،B،C لا يكون نظاماً يمينياً، A.n < 0 والحجم = $|A.(B\times C)|$.

24-إذا كان $C=C_1i+C_2j+C_3k$ $B=B_1i+B_2j+B_3k$ $A=A_1i+A_2j+A_3k$ فوضح أن:

$$A.(B\times C)=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$A.(B\times C)=A.\begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$=(A_1i+A_2j+A_3k).(B_2C_3-B_3C_2)i+(B_3C_1-B_1C_3)j+(B_1C_2-B_2C_1)k)]$$

$$=A_1(B_1C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_1C_2-B_2C_1)=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

25- أوجد حجم متوازي السطوح الذي أضلاعه $A=3i-j,\ B=j+2k,\ C=i+5j+4k$

من مسألتي 23 و 24، نجد أن:

$$= |A.(B\times C)| = \left|\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}\right|$$ حجم متوازي السطوح

$$= |-20| = 20.$$

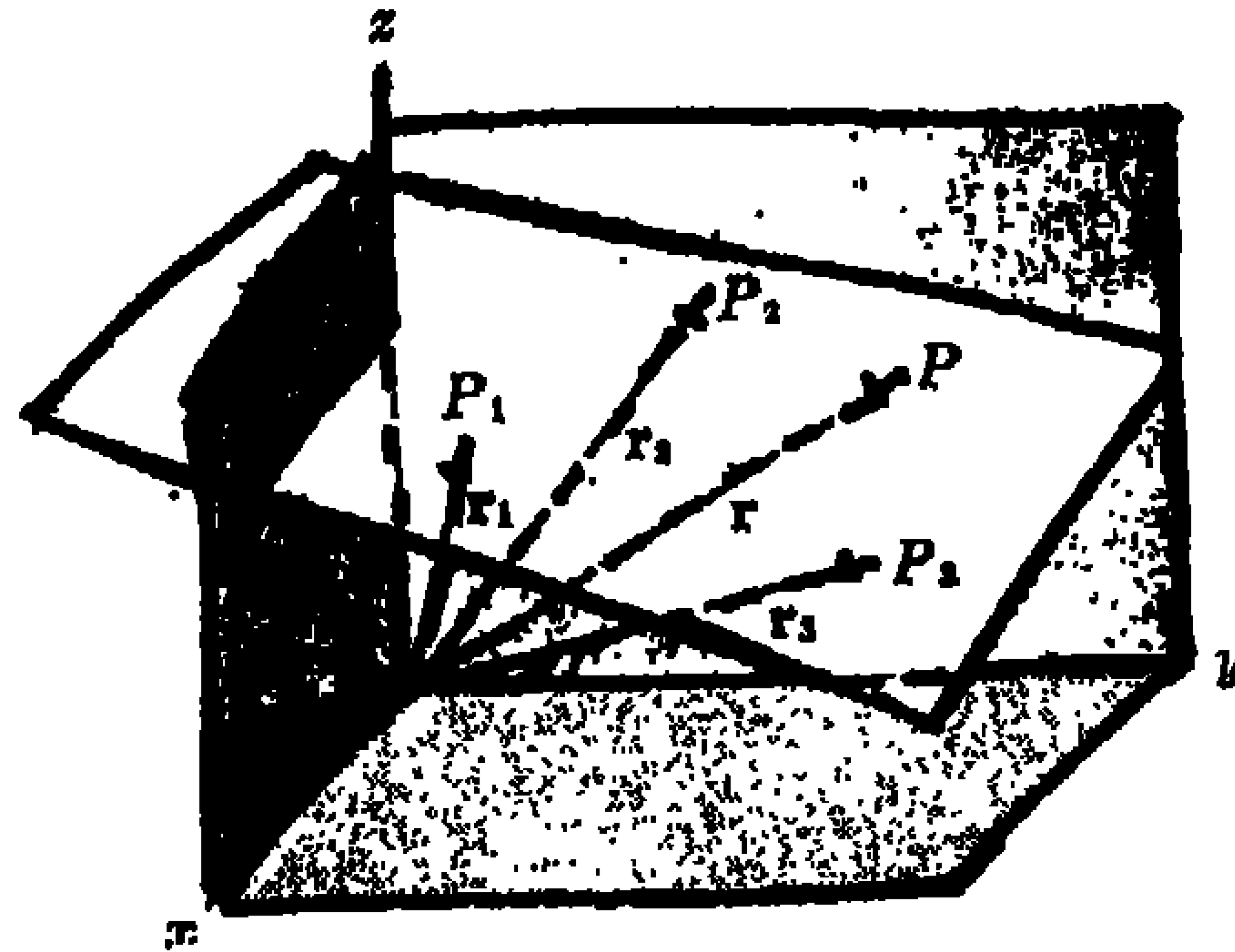
26- أثبت أن $A.(B\times C) = (A\times B).C$ أي أن (النقطة) و (علامة ×) للضرب العددي والضرب المتجه يمكن أن يحل كل منهما مكان الآخر.

باستخدام مسألة رقم 24 ينتج أن:

$$A.(B\times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \,.\, (A\times B).C = C.(A\times B) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

لأن المحددين متساويان وبذلك ينتج المطلوب.

27- إذا كانت: $r_1 = x_1i+y_1j+z_1k,\ r_2 = x_2i + y_2j + z_2k,\ r_3 = x_3i+y_3j+z_3k$ هي المتجهات الموضعية للنقط $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$ $P_3(x_3,y_3,z_3)$. أوجد معادلة المستوى المار بالنقط P_1,P_2,P_3 انظر شكل (1-26).



شكل (1-26)

سنفترض أن النقط P_1,P_2,P_3 لا تقع على نفسه الخط المستقيم نفسه إذن فهي تحدد مستوى.

بفرض $r = xi+yj+zk$ يعين متجه الموضع لأي نقطة $P(x,y,z)$ في المستوى نعتبر المتجهات $P_1P_2=r_2-r_1$، $P_1P_3=r_3-r_1$، $P_1P=r-r_1$ حيث جميعا تقع في المستوى.

حينئذ $P_1P.P_1P_2 \times P_1P_3=0$ أو $(r-r_1)\ (r_2-r_1) \times\ (r_3-r_1) = 0$ وبصـــورة الإحداثيـات العمودية تصبح:

$$[(x-x_1)i + (y-y_1)j + (z-z_1)k]\ .\ [(x_2-x_1)i +(y_2-y_1)j + (z_2-z_1)k] \times$$

$$[(x_2-x_1)i + (y_2-y_1)j+(z_3-z_1)k] = 0$$

أو باستخدام مسألة رقم 24 ينتج:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-yl & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

28- وحد معادلة المستوى المار بالنقط $P_1(3,1,-2), P_2(-1,2,4), P_3(2,-1,1)$

المتجهات الموضعية للنقـط P1,P2,P3 وأي نقطـة P(x,y,z) في المسـتوى هـي على الترتيب:

$$r_1 = 3i+j - 2k,\ \ r_2 = -i+2j+4k, r_3 = 2i-j+k,\ \ r = xi+yj+zk$$

بما أن $P_2P_1 = r_2-r_1.\ P_3P_1 = r_3-r_1$ و $PP_1=r-r_1$ جميعاً تقع في المستوى المطلوب ولذلك المعادلة هي $(r-r_1).\ (r_2-r_1)\times(\ r_3-r_1) = 0$.

$$\{(x-3)i + (y-1)j + (z+2)k\} \bullet \{-4i + j + 6k) \times (-i-2j + 3k) = 0$$

أي أن:

$$\{(x-3)i + (y-1)j + (z+2)k\} \bullet \{15i + 6i + 6k\} = 0$$

$5x+2y+3z=11$ أو $15(x-3)+ 6(y-1) + 9(z+2)=0$

طريقة أخرى:

من مسألة رقم 27، المعادلة المطلوبة هي:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+2 \\ -1-3 & 2-1 & 4+2 \\ 2-3 & -1-1 & 1+2 \end{vmatrix} =0$$ أو $5x+2y+3z=11$

29- إذا كانت $C=4j-3k$ ، $B=2i-3j+k$ ، $A=i+j$ أوجد (أ) $(A\times B)\times C$.
(ب) $A\times(B\times C)$.

(أ) $A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=i-k-5k$ إذن $(A\times B)\times C=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=23i+3j+4k$

(ب) $B\times C=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=i-k-5k$ إذن $A\times(B\times C)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}=8i+8j+k$

ومن ذلك ينتج (عموماً) أن $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$.

المشتقات:

30- إذا كانت $r=(t^3-2t)i-3e-2tj+2\sin 5tk$ فأوجد:

(أ) $\frac{dr}{dt}$ (ب) $\left|\frac{dr}{dt}\right|$ (جـ) $\frac{d^2r}{dt^2}$ (د) $\frac{d^2r}{dt^2}$

عند $t=0$ وأعط الدلالة الفيزيائية الممكنة لذلك.

(أ) $\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}(r^3+2t)i+\frac{d}{dt}(-3e^{-2t})j+\frac{d}{dt}(2\sin 5t)k=(3t^2+2)i+6e^{2t}j+10\cos 5tk$

عند $t=0$ $dr/dt=5i+6j+10k$.

(ب) من (أ) $|dr/dt|=\sqrt{(2)^2+(6)^2+(10)^2}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$ عند $t=0$.

(ج) $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(3t^2+2\right)i+6e^{-2t}j+10\cos 5tk)=6ti-12e^{-2t}j-50\sin 5tk$

عند $t=0$.$d^2r/dt^2 = -12j$.

(د) من (جـ) $d^2r/dt^2 = 12$ عند $1=0$.

إذا كانت t تمثل الزمن فهذه تمثل على الترتيب السرعة، مقدار السرعة، العجلة، مقدار العجلة عند $t=0$ لنقطة تتحرك على منحنى في الفراغ الذي معادلاته البارامترية (المتغيرة) للزمن t هي $x=t^3+2t, y=-3e^{-2t} z=2\sin 5t$.

31- أثبت أن $\frac{d}{du}(A.B)=A.\frac{dB}{du}+\frac{dA}{du}.B,$ حيث المتجهان A،B دوال تفاضلية للمقدار u.

الطريقة الأولى:

$$\frac{d}{du}(A.B)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{(A+\Delta A).(B+\Delta B)-A.B}{\Delta u}$$
$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{A.\Delta B+\Delta A.B+\Delta A.\Delta B}{\Delta u}$$
$$=\lim_{\Delta u\to 0}\left(A.\frac{\Delta B}{\Delta u}+\frac{\Delta A}{\Delta u}.B\frac{\Delta A}{\Delta u}.\Delta B\right)=A.\frac{dB}{du}+\frac{dA}{du}.B$$

الطريقة الثانية:

إذا فرضنا $A= A_1i + A_2j+A_3k, B=B_1i + B_2j + B_3k$ فإن:

$$\frac{d}{du}(A.B)=\frac{d}{du}(A_1B_1+A_2+B_2+A_3B_3)$$
$$=\left(A_1\frac{dB_1}{du}+A2\frac{dB_2}{du}+A_3\frac{dB_3}{du}\right)+\left(\frac{dA_1}{du}B_1+\frac{dA_2}{du}B_2+\frac{dA_3}{du}B_3\right)$$
$$=A.\frac{dB}{du}+\frac{dA}{du}.B$$

32- إذا كانت $\phi(x,y,z) = x^2yz$ و $A= 3x^2yi + yz^2j - xzk,$ أوجد $\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\phi A)$ عند النقطة (1,-2,-1).

$\phi A=(x^2yz)(3x^2yi+yz^2j-xzk)\text{-}3x4y^2zi+x^2y^2z^2j-x^3y_2z_1j-x_2yz_2k$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi A)=\frac{\partial}{\partial z}\left(3z^4y^2zi+x^2y^2z^3j-x^2yz^2k\right)=3x^4y^2i+3x^2y^2z^1j-2x^2yzk$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\partial A)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^4y^3i+3x^2y^2z^1j-2x^2yzk\right)=6x^2yi+6x^2yz^2j-2x^2zk$$

إذا كانت $x=1, y=-2, z=-1$ فإن هذا تصبح $-1_2i - 1_2j + 2k$.

33- إذا كانت $A=x^2 \sin y\, i + z^2\cos y j -zy^2k$ فأوجد dA.

الطريقة الأولى:

$$\frac{\partial A}{\partial x}=2x\sin yi-y^2k,\frac{\partial A}{\partial y}=z^2\cos yi-z^2\sin yj-2xyk,\frac{\partial A}{\partial z}=2z\cos yj$$

$$dA=\frac{\partial A}{\partial x}dx+\frac{dA}{\partial y}dy+\frac{\partial A}{\partial z}dz$$

$= (2x\sin yi-y^2k)\, dx + (x^2\cos yi-z^2\sin yj - 2xyk)dy+ (2x\cos yj)dz$

$= (2x\sin ydx+x^2\cos ydy)i+(2z\cos ydz -z^2 \sin y\, dy)j-(y^2dx+2xydy)k$

الطريقة الثانية:

$dA = d(x^2\sin y)i + d(x^2\cos y)j - d(xy^2)k$

$=(2z\sin ydx+x^2\cos ydy)i+(2z\cos y\, dz-z^2\sin ydy)j -(y^2dx+2xydy)k$

الانحدار، التباعد والالتفاف:

34- إذا كان $\phi=x^2yz^3$ $\quad A=xzi-y^2j+2x^2yk,$ فأوجد:

(أ) $\nabla\phi$ (ب) $\nabla.A$ (جـ) $\nabla\times A$ (د) $\text{div}(\phi A)$ (هـ) $\text{curl}(\phi A)$.

(أ)

$$\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial x}k\right)\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz^2\right)i+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz^2\right)j$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2yz^3k\right)=2xyz^3+x^3z^3j+3x^2yz^2k$$

(ب)

$$\nabla.A=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial u}j+\frac{\partial}{\partial x}k\right).\left(xzi-y_2j+2x^2yk\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2x^2y\right)=z-2y$$

(جـ)

$$\nabla\times A=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\times\left(xzi-y^2j+2x^2yk\right)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(2z^2y\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-y^2\right)\right)i+\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz)\right)i+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)k$$

$$=2x^2i+(x-4xy)j$$

(د)

$$(\phi A)\text{ تباعد }=\nabla.(\phi A)=\nabla.\left(x^2yz^4i-x^2y^3z^3j+2x^4y^2z^3k\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz^4\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2y^3z^3\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^4y^3z^3\right)$$

$$=3x^2yz^4-3x^2y^2z^3+6x^4y^2x^2$$

(هـ)

$$(\phi A)\text{ التفاف }=\nabla\times(\phi A)=\nabla\times\left(x^3yz^4j+2x^4y^2z^3k\right)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ x^2yz^4 & -x^2y^3z^2 & 2x^4y^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(4x^4yz^3+3z^2y^3z^2)i+(4x^2yz_2-8x^3yz_2-8x^3y_2z^3)j-(2xy^2x^3+x^3z^4)k$$

35- أثبت أن: $\nabla.(\phi A)=(\nabla\phi).A+\phi(\nabla.A)$

$$\nabla.(\phi A)=\nabla.(\phi A_1 i+\phi A_2 j+\phi A_2 k)$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1)+\frac{\partial}{\partial u}(\phi A_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$
$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}A_1+\frac{\partial\phi}{\partial y}A_2+\frac{\partial\phi}{\partial z}A_3+\phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}i+\frac{\partial\phi}{\partial z}k\right).(A_1 i+A_2 j+A_3 k)$$
$$+\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right).(A_1 i+A_2 j+A3)k$$
$$=(\nabla\phi).A+\phi(\nabla.A)$$

36- أثبت أن $\nabla\phi$ هو متجه عمودي على السطح $\phi\ (x,y,z) = c$ حيث c مقدار ثابت. إذا فرضنا $r = xi + yj + zk$ هو متجه الموضع لأي نقطة ولتكن $P(z,y,z)$ على السطح.

حينئذ $dr- dxi + dyj + dzk$ يقع في المستوى المماس للسطح عند P لكن

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial x}dz=0$$ أو $$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial x}k\right).(dxi+dyj+dsk=0)$$

أي أن $\nabla\phi\,dr=0$ بحيث أن $\nabla\phi$ عمودي على dr ولذلك فهو عمودي على السطح.

37- أوجد وحدة المتجه العمودي على السطح $2x^2+4yz-5x^2=-10$ عند النقطة $P(3,-1,2)$ باستخدام مسألة رقم 36، المتجه العمودي على السطح هو:

$\nabla(2x^2+4yz-5x^2) = 4xi+4zj + (4y-10z)k=12i + 8j - 24k$ عند $(3,-1,2)$

إذن وحدة المتجه العمودي على السطح عند النقطة P هي :

$$\frac{12i+8j-24k}{\sqrt{(12)^2(8)^2+(-24)^2}}=\frac{3i+2j-6k}{7}$$

الوحدة الأخرى للمتجه العمودي على السطح عند النقطة P هي: $-\frac{3i+2j-6k}{7}$

38- إذا كانت $\phi = 2x^2y - xz^3$ (أ) $\nabla\phi$ و (ب) $\nabla^2\phi$.

(أ) $$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial x}k = \left(4xy - z^3\right)i + 2x^2j - 3xz^2k$$

(ب) $$\nabla.\nabla_\phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(4xy - z^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-3x^2\right)$$ لابلسيان $\nabla^t\phi = \phi$

$$= 4y - 6xz$$

طريقة أخرى:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2x^2y - xz^3\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2x^2y - xz^3\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(2x^2y - xz^3\right)$$

$$= 4y - \partial xz$$

39- أثبت أن:

تباعد التفاف A = $\text{div curl } A = 0$

تباعد التفاف A $$= \text{div curl } A = \nabla.\left(\nabla.\times A\right) = \nabla.\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla.\left[\left(\frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^1 A_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}$$

$$= 0$$

بفرض أن A لها مشتقات جزئية ثانية مستمرة بحيث أن ترتيب التفاضل غير مهم.

جاكوبيان وإحداثيات منحنى الأضلاع:

40- أوجد قيمة ds^2 في صورة (أ) إحداثيات أسطوانية (ب) إحداثيات كروية وعين مقياس العوامل.

(أ) الطريقة الأولى:

$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z=z$

$dx = -\rho \sin\phi d\phi + \cos \phi \, d \rho, \; dy= \rho \cos\phi \, d\phi+\sin\phi d\rho, \; dz = dz$

إذن $ds^2= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (-\rho\sin \phi \, d \phi + \cos \phi \, d\rho)^2+ (\rho \cos \phi \, d\phi$

$+ \sin \phi d \rho)^2 + (dz)^2$

$= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2(d\rho)^2 = h_3^2(dz)^2$

$h_1=h_2=1, h\phi= \rho, h_1=1,$ عوامل عددية.

الطريقة الثانية:

متجه الوضع هو $r = \rho \cos \phi \, i + \rho \sin \phi \, j + zk$ إذن:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial r}{\partial \phi}+\frac{\partial r}{\partial z}dz$$
$$=(\cos\phi i+\sin\phi j)d\rho+(-\rho\sin\phi i+\rho\cos\phi j)d\phi+kdz$$
$$=(\cos\phi d\rho-\rho\sin\phi d\phi)i+(\sin\phi\rho+\rho\cos\phi d\phi)j+kdz$$

أي أن :

$$ds^2=dr.dr=(\cos\phi d\rho-\rho\sin\phi d\phi)^2+(\sin\phi d\rho+\rho\cos\phi d\phi)^2+(dz)^2$$
$$=(d\rho)^2+\rho^2(d\phi)^2+(dz)^2$$

(ب) $x=r\sin\theta\cos\phi, \quad y=r\sin\theta\sin\phi$

إذن $dx=-r\sin\theta\sin\phi d\phi+r\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\cos\phi dr$

$$dy=r\sin\theta\cos\phi d\phi+r\cos\theta\sin\phi d\theta+\sin\theta\sin\phi dr$$
$$dz=-r\sin\theta d\theta+\cos\theta dr$$

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2(d\phi)^2$$

العوامل العددية هي $h_1=h_r=1,\ h_2=h_\theta=r,\ h_3=h_\phi=r\sin\theta$

41- أوجد حجم العنصر dV في صورة (أ) الإحداثيات الأسطوانية (ب)الإحداثيات الكروية وضح ذلك بالرسم حجم العنصر بالإحداثيات لمنحنى الأضلاع العمودي للمقادير u_1,u_2,u_3 هو:

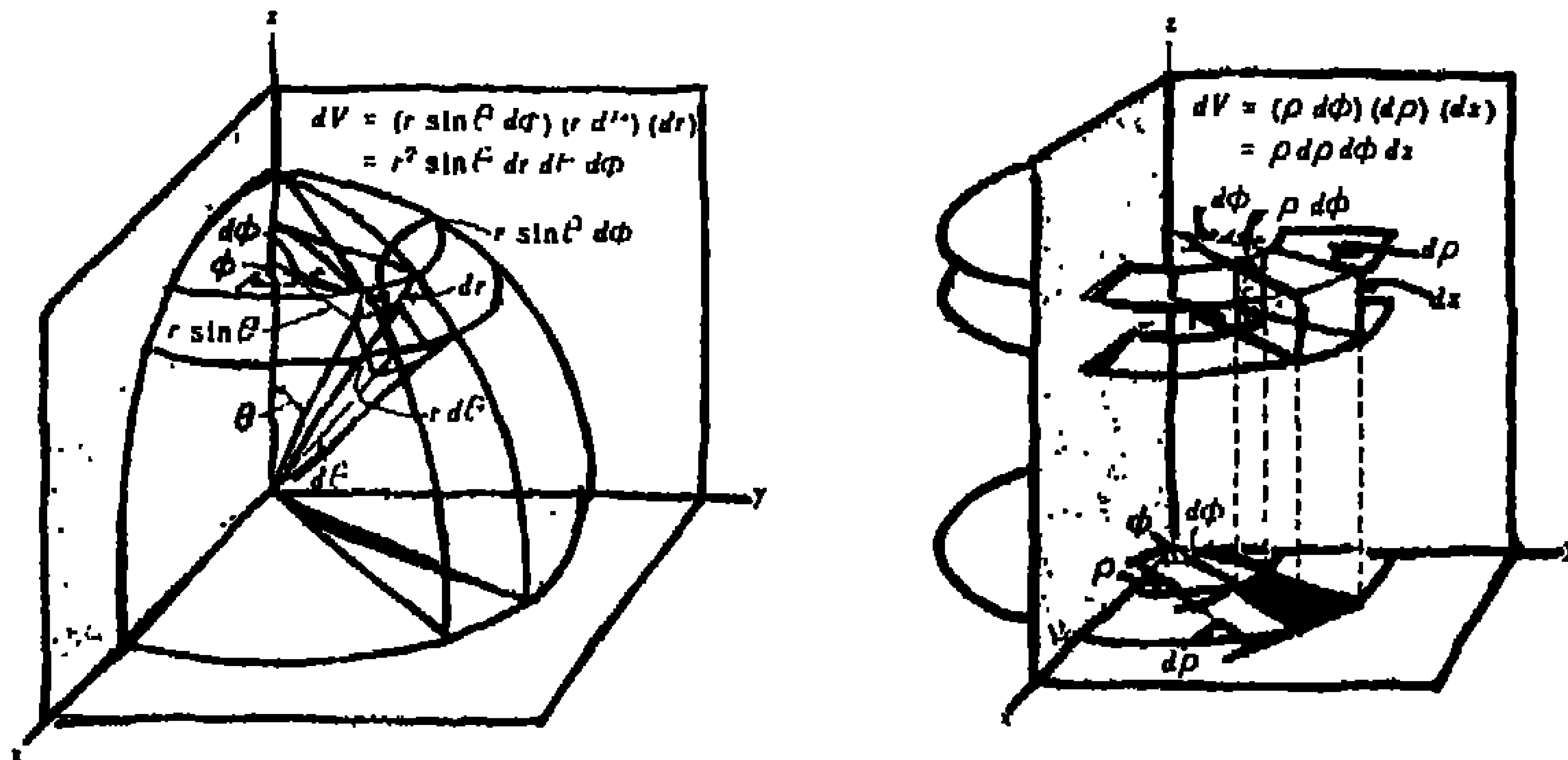
$$dV=h_1h_2h_3du_1du_2du_3=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1,du_2,du_3$$

(أ) بالإحداثيات الأسطوانية $u_1=\rho$, $u_2=\phi$, $u_3=x$, $h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=1$ (أنظر مسألة رقم 40 (أ)] حينئذ.

$$dV=(1)(\rho)(1)d\rho\,d\phi\,dz=\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

وهذا يمكن أيضا ملاحظته مباشرة في شكل 7-27 (أ)

(أ) حجم عنصر في الإحداثيات الأسطوانية (ب) حجم عنصر في الإحداثيات الكروية



شكل (1-27)

(ب) بالإحداثيات الكروية $u_1=r,\ u_2=\theta,\ u_3=\phi,\ h_1=1,\ h_2=r, h_3=r\sin\theta$

أنظر مسألة رقم 40 (ب)]. حينئذ:

$$dV=(1)(r)(\sin\theta)dr\,d\theta\,d\phi=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

ويمكن أيضا ملاحظته مباشرة من شكل 1-27 (ب) أعلى.

46- عبر في صورة إحداثيات أسطوانية (أ) انحدار ϕ، (ب) تباعد A، (جـ) $\Delta^2\phi$.

بفرض $h_1=1, h_2=\rho, h_3=1$ و $u_1=\rho, u_2=\phi, u_3=0$ [انظر مسألة 40 (أ) بالنتائج 1، 2و 4 ، حينئذ.

(أ) $\frac{\partial\phi}{\partial z}e_3 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial\rho}e_1 = \frac{1}{1}\frac{\partial\phi}{\partial z}e_3 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}e_1 + \frac{1}{1}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}e_1 = \nabla\phi =$ انحدار ϕ

حيث e_1,e_2,e_3 هي وحدة المتجهات في اتجاه زيادة ρ,ϕ,z على الترتيب.

(ب) $\left[\frac{\partial}{\partial z}((1)(\rho)A_3) + \frac{\partial}{\partial\phi}((1)(1)A_2) + \frac{\partial}{\partial\rho}((\rho)(1)A_1)\right]\frac{1}{(1)(\rho)(1)} = \nabla.A =$ تباعد A

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1)+\frac{\partial A_2}{\partial\phi}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right]$$

حيث $A= A_1e_1+A_2e_2 + A_3e_3$.

(جـ) $$\nabla^2\phi=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(1)}{(\rho)}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1)(\rho)}{(1)}\frac{(\partial\phi)}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^3}$$

مسائل منوعة

43- أثبت أن $\text{grad}\, f(r)=\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$, حيث $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $f'(r) = df/dr$ المفروض أنها موجودة.

$$\text{grad}\, f(r)=\nabla f(r)=\frac{\partial}{\partial x}f(r)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}f(r)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}f(r)\mathbf{k}$$

$$=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i}+f'(r)\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$=f(r)\frac{x}{r}\mathbf{i}+f'(r)\frac{y}{r}\mathbf{j}+f'(r)\frac{z}{r}\mathbf{k}=\frac{f'(r)}{r}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$$

طريقة أخرى: بالإحداثيات لمنحنى الأضلاع العمودية للمقادير u_1,u_2,u_3 يكون لدينا:

$$\nabla\phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3 \qquad (1)$$

إذا استعملنا الإحداثيات الكروية بوجه خاص، فيكون لدينا $u_1,\ r, u_2=\theta$, $u_3=\phi$ بفرض، $\phi=f(r)$ كدالة للمقدار r، الحدين الأخيرين من الطرف الأيمن من المعادلة (1) مساويا للصفر (حيث الدالة في متغير واحد هو r). ومع ملاحظة $h_1=1,\ \mathbf{e}_1=\mathbf{r}/r$ ، إذن يكون لدينا النتيجة:

$$\nabla f(r)=\frac{1}{i}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r} \qquad (2)$$

44- (أ) أوجد لابلاسيان للمقدار $\phi=f(r)$، (ب) أثبت أن المقدار $\phi=1/r$ هو حل لمعادلة لابلاس $\nabla^2\phi=0$.

(أ) من مسألة رقم 43:

$$\nabla\phi=\nabla f(r)=\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$$

وبواسطة مسألة رقم 354، بفرض أن f(r) لها مشتقات جزئية ثانية مستمرة، فيكون لدينا لابلسيان للمقدارφ:

$$=\nabla^2\phi=\nabla.(\nabla\phi)=\nabla.\left\{\frac{f'(r)}{r}r\right\}$$

$$=\nabla\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}.r+\frac{f'(r)}{r}(\nabla.r)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}r.r+\frac{f'(r)}{r}(3)$$

$$=\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^3}r^2+\frac{3f'(r)}{r}=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$$

طريقة أخرى: بالإحداثيات الكروية، يكون لدينا:

$$\nabla^2U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\phi^2}$$

إذا كانت U= f(r) ، فإن الحدين الأخيرين من الطرف الأيمن مساويان صفرا ونجد:

$$\nabla^2f(r)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2f'(r)\right)=f''(r)+\frac{2}{r}f(r)$$

(ب) من النتيجة في الجزء (أ)، يتكون لدينا:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r^3}=0$$

الذي يوضح أن 1/r هو حل المعادلة لابلاس.

45- جسيم يتحرك على المنحنى الفراغي r=r (t)، حيث t هي الزمن مقيسا من زمن ابتدائي ما. إذا كانت $v=|dr/dt|=ds/dt$ هو مقدار السرعة للجسيم (s هو طول القوس على المنحنى الفراغي مقيسا من موضع الابتداء)، أثبت أن العجلة a للجسيم تعطى بالعلاقة:

$$a=\frac{dv}{dt}T+\frac{v^2}{\rho}N$$

حيث T هي وحدة المتجـه المماس، N هـي وحـدة العمـودي المتجه على المنحنى الفراغي وأيضا :

$$\rho=\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|^{-1}=\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)\right\}^{-1/2}$$

سرعة الجسيم يعطى بالعلاقة v=vT. إذن العجلة تعطى أيضا بالعلاقة:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(vt)=\frac{dv}{dt}T+v\frac{dT}{dt}=\frac{dv}{dt}T+v\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{dt}T+v^2\frac{dT}{ds} \quad (1)$$

بما أن T لها وحدة المقدار، يكون لدينا TT= 1 حينئذ تفاضل بالنسبة إلى s.

$$T.\frac{dT}{ds}=0 \quad \text{أو} \quad T.\frac{dT}{ds}+\frac{dT}{ds}.T=0, \qquad 2T.\frac{dT}{ds}=0$$

التي منها يترتب أن dT/ds عمودية على المقدارT إذا أشرنا للمقدار N وحدة المتجه في اتجاه المقدار dT/ds. ويسمى العمـود الأساسي على المنحنى الفراغي، فيكون عندنا:

$$\frac{dT}{ds}=kN \qquad ....(2)$$

حيث k طول المقدار dT/ds. بما أن T=dr/ds ، يكون لدينا $dT/ds=d^2r/ds^2$.

إذن:

$$k=\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|=\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/3}$$

بتعريف ρ = 1/k، (2) تصير dT/ds = N/ρ. وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$a=\frac{dv}{dt}T+\frac{v^2}{\rho}N$$

وهو المطلوب.

المركبتين dv/dt و v^2/ρ في اتجاه المقدارين T وN تسمى مركبة العجلة المماسية ومركبة العجلة العمودية والأخيرة أحيانا تسمى عجلة الجانب المركزي.

الكميتين ρ و k على الترتيب تسـميان نصـف قطـر الانحنـاء (التقـوس) للمنحنـى الفراغي والانحناء (التقوس) للمنحنى الفراغي (k).

ملاحظة: العجلة أحيانا تسمى التسارع.

تمارين إضافية

جبر المتجهات:

46- بفرض أن مقدارين متجهين A ، B، وضح هندسيا المتساوية $4A+3(B-A) = A+3B$.

47- يتحرك رجل 25km شمال شرق، 15km شرقا، 10km جنوبا. باستخدام مقياس رسم مناسب حدد بالرسم (أ) بعده، (ب) اتجاهه من موضع الابتداء. هل من الممكن تحديد الإجابة تحليليا؟

الإجابة: 33.6km، 13.2° شمال الشرق.

48- إذا كانت A و B أي متجهين غير صفريين وليس لهما نفس الاتجاه، أثبت أن $mA+nB$ هو متجه في المستوى محدد بالمتجهين A،B.

49- إذا كان C,B,A متجهين ليس في مستوى واحد وكان $x_1A+y_1B+z_1C=x_2A+y_2B+z_2C$، أثبت أن الشرط الضروري لذلك من $x_1=x_2,\ y_1=y_2\ ,\ z_1=z_2$.

50- بفرض ABCD أي شكل رباعي والنقط P,Q,R,S منتصفات الأضلاع المتوالية. أثبت أن (أ) PQRS متوازي أضلاع. (ب) محيط الشكل PQRS مساو لمجموع طول القطرين للشكل ABCD.

51- أثبت أن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى في النقطة التي هي تقسيم ثلاثي لكل مستقيم متوسط.

52- أوجد وحدة المتجه في اتجاه محصلة المتجهات $A=2i-j+k$, $B=i+j+2k$, $C+3i+2j+4k$.

الجواب: $(6i-2j+7k)\sqrt{89}$

الضرب العددي:

53-أوجد قيمة $|(A+B)\ (A-B)|$ إذا كان $A=2i-3j+5k$، $B=3i+j-2k$.

الجواب: 24.

54- أثبت قانون جيب التمام للمثلث. [تنويه: بأخذ الأضلاع مثل A,B,C حيث $C=A-B$ بعد ذلك استخدم $C.C=(A-B).(A-B)$].

55- أوجد قيمة a بحيث أن $2i-3j+5k$, $3i+aj-2k$ عموديان.

الجواب: $a=-4/3$

56- إذا كانت $A=2i+j+k$, $B=i-2j+2k$, $c=3i-4j+2k$ أوجد مسقط المتجه $A+C$ في اتجاه المتجه B.

الجواب: 17/3.

57- مثلث رؤوسه عند النقطة $A(2,3,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(1,-2,3)$ أوجد (أ) طول المستقيم المتوسط المرسوم من النقطة B إلى الضلع AC، (ب) الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم المتوسط مع الضلع BC.

الجواب: (أ) $1/2\sqrt{26}$ (ب) $\cos^{-1}\sqrt{91}/14$

58- أثبت أن قطري المعين كل منهما عمودي على الاخر.

59- أثبت أن المتجه $(AB+BA)(A+B)$ يمثل منتصف الزاوية بين المتجهين A،B.

الضرب المتجه:

60- إذا كان $A=2i-j+k$, $B=i+2j-3k$ أوجد $|(2A+B)\times(B2-\ )|$.

الجواب: $25\sqrt{3}$

61- أوجد وحدة المتجه العمودي على مستوى المتجهات $A=3i-2j+4k$ و $B=i+j-2k$.

الجواب: $\pm(2j+k)\sqrt{5}$.

62- إذا كان $A\times B=A\times C$ من $B=C$ ضروريا؟

63- أثبت أن مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقط (3,2,1-) ، (2 ,1-,1)، (2,-3,1).

الجواب: $1/2\sqrt{3}$.

64- أوجد أقصر بعد من النقطة (3,2,1) إلى المستوى المحدد بالنقط (2,0,1-)، (3,-1,1)، (1,1,0).

الجواب: 2.

حواصل الضرب الثلاثية:

65-إذا كان $A=2i + j - 3k,\ B=i-2j + k,\ C=-i+j-4k$، فأوجد (أ)$A(B\times C)$، (ب)$C(A\times B)$، (جـ) $A\times(B\times C)$، (د) $(A\times B)\times C$.

الجواب: (أ)20 ، (ب)10، (جـ) $8i-19j-k$ ، (د) $25i-15j-10k$.

66-أثبت أن (أ) $A.(B\times C) = B.(C\times A) = C.(A\times B)$

(ب) $A\times(B\times C) = B(A.C) - C(A.B)$

67-أوجد معادلة المستوى المار بالنقط (4,1,0)، (3-,2,1-)، (2-,1-,).

الجواب: $2x+y - 3z = 9$

68- أوجد حجم الجسم رباعي السطوح الذي رؤوسه عند النقط (1,-2,1)، (1-,0,1)، (1,-1,2)، (2,1,1).

الجواب: $4/3$.

69- أثبت أن $(A\times B).(C\times D) + (B\times C).(A\times D) + (C\times A).(B\times D) = 0$.

المشتقات:

70- جسيم يتحرك على المنحنى الفراغي $r=e^{-1}\cos t\,i+e^{-1}\sin t\,j+e^{-1}k$ أوجد مقدار (أ) السرعة، و(ب) العجلة عند أي زمن t.

الجواب: (أ) $\sqrt{3}e^{-t}$ (ب) $\sqrt{5}e^{-t}$

71- أثبت أن $\frac{d}{du}(A\times B)=A\times\frac{dB}{du}+\frac{dA}{du}\times B$ حيث A، B دوال تفاضلية للمقدار u.

72- أوجد وحدة المتجه المماسي للمنحنى الفراغي $x=t \ ,y=t^2, z=t^3$، عند النقطة حيث $t=1$.

الجواب: $(1+2j+3k)/\sqrt{14}$

73- إذا كانت $r=a\cos\omega+b\sin\omega t$ حيث a و b أي متجهين ليست على خط واحد، ω مقياس ثابت/ أثبتأن (أ) $r\times\frac{dr}{dt}=\omega(a\times b)$ (ب) $\frac{d^2r}{dt^2}+\omega^2 r=\theta$

74- إذا كان $B= yi + xj - xyzk$, $A = x^2i-yj _ xzk$, $C=i-yj+x^2zk$، أوجد:

(أ) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(A\times B)$. (ب) $[A .(B\times C)]$ عند النقطة (1,-1,2).

الجواب: (أ) $-4i+ 8j$ (ب) 8dx

75- إذا كان $R = x^2yi - 2y^2zj + xy^2z_2k$، أوجد $\left|\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\right|$ عند النقطة (2,1,-2).

الجواب: $16\sqrt{5}$

الانحدار، التباعد، والالتفاف.

76- إذا كانت U,V,A,B لها مشتقات جزئية مستمرة أثبت أن:

(أ) $\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$ (ب) $\nabla.(A+B)=\nabla.A+\nabla.B$

(جـ) $\nabla\times(A+B)=\nabla\times A+\nabla\times B$.

77- إذا كانت $\phi= xy+ yz + zx$, $A=x2yi + y^2zj + y^2zk + z^2xk$ أوجد:

(أ) $A.\nabla\phi$ (ب) $\phi\nabla.A$ (جـ) $(\nabla\phi)\times A$ عند النقطة (3,-1,2)

الجواب: (أ) 25. (ب) 2 (جـ) $56i - 30j + 47k$

78- أثبت أن $\nabla\times(r^2r)=0$ حيث $=xi + yj + zk$ و $r = |r|$

79- أثبت أن (أ) $\nabla\times(UA)=(\nabla U)\times A+U(\nabla\times A)$

(ب) $\nabla.(A\times B)=B.(\nabla\times A)-A.(\nabla\times B)$

80- أثبت أن التفاف المحدار U = صفرا، أذكر العبارات للشروط المناسبة على U.

81- أوجد وحدة المتجه العمودي على السطح $x^2y - 2xz + 2xz + 2y^2z^4 = 10$ عند النقطة (2,1,-1).

الجواب: $\pm(31+4j-6k)/\sqrt{61}$

82- إذا كان $A=3xz2i-yzj+(x+2z)k$ ، أوجد قيمة التفاف التفاف A.

الجواب: $-6xi+(6x-1)k$.

83- (أ) أثبت أن $\nabla\times(\nabla\times A)=-\nabla^2 A+\nabla(\nabla.A)$ (ب) حقق النتيجة في الجزء (أ) إذا كانت A معطاة كما في مسألة رقم 82.

جاكوبيان والإحداثيات لمنحنى الأضلاع:

84- أثبت أن $\left|\frac{(\partial)x,y,z}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|=\left|\frac{\partial r}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial r}{\partial u_2}\times\frac{\partial r}{\partial u_3}\right|$

85- عبر عن (أ) المحدار ϕ، (ب) تباعد A، (جـ) $\nabla^2\phi$ في إحداثيات كروية.

الجواب:

(أ) $\frac{\partial\phi}{\partial r}e_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_2+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}e_3$

(ب) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_1)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$ حيث $A=A_1e_1+A_1e_2+A_2e_1$.

(جـ) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\theta}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}$

86- التحول من إحداثيات متعامدة إلى إحداثيات أسطوانية مكافئة المقطع يعرف بالمعادلات $x=1/2\,(u^2-v^2),\quad y=uv,\quad z=z$

(أ) أثبت أن النظام عمودي.

(ب) أوجد ds^3 والمقياس للعوامل.

(جـ) أوجد جاكوبيان التحول وعنصر الحجم.

الجواب: (ب) $ds_2= (u_2+v^2)du^2+ (u^2+v^2)dv^2+dx^2,\ h_1=h_2= \sqrt{u^2+v^2}, h_3=1$

(جـ) $u^2+v^2, (u^2+v^2)\ du\ dv\ dx$

87-أثبت (أ) $\nabla^2\phi$ و (ب) تباعد A بإحداثيات أسطوانية مكافئة المقطع.

الجواب:

(أ) $$\nabla^2\phi=\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

(ب) تباعد A = $$=\frac{1}{u^2+v}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_1\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_2\right)\right\}+\frac{\partial A_2}{\partial z}$$

88- أثبت أن الإحداثيات لمنحنى الأضلاع المتعامدة هي:

$$\nabla\phi=\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}+\frac{e_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}+\frac{e_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

[تنويه: نفرض $\nabla\phi=a_1e_1+a_2e_1+a_3e_3$ وباستعمال الحقيقة $d\phi=\nabla\phi.dr$ من الضروري أن يتساويا في حالتي الإحداثيات المتعامدة وإحداثيات منحنى الأضلاع].

89- أعط تفسير متجه للنظرية في مسألة 35 من الفصل السادس.

مسائل متنوعة

90- إذا كانت A دالة تفاضلية للمقدار u، $|A(u)| = 1$ أثبت أن dA/du عمودية على A.

91- أثبت القوانين 6،7،8.

92- إذا كانت ρ ، θ هي الإحداثيات القطبية A,B,n أي مقادير ثابتة أثبت أن $U=\rho^n(A\cos\phi+B\sin n\phi)$ تحقق معادلة لابلاس.

93- إذا كانت $V=\frac{2\cos+3\sin^3\theta\cos\phi}{r^2}$ فأوجد $\nabla^2 V$.

الجواب: $\frac{6\sin\theta\cos\phi(4-\sin^2\theta)}{r^2}$.

94- أوجد الدالة العامة الغالبة لكل من:

أ) الإحداث الأسطواني ρ.

ب) الإحداث الكروي r.

جـ) الإحداث الكروي θ التي تحقق معادلة لابلاس.

الجواب: (أ) $A+B\ln\rho$، (ب) $A+B/r$، (جـ) $A+B\ln(\csc\theta-\cot\theta)$

حيث A ، B أي مقادير ثابتة.

95- بفرض T و N تشير على الترتيب وحدة متجه المماس، ووحدة المتجه العمودي الأساسي للمنحنى الفراغي $r=r(u)$، حيث r(u) المفروض أنها تفاضلية. المتجه $B=T\times N$ يسمى وحدة المتجه ثنائي التعامد للمنحنى الفراغي. أثبت أن:

$$\frac{dT}{ds}=kN,\quad \frac{dB}{ds}=-rN,\quad \frac{dN}{ds}=TB-kT$$

تلك تسمى قوانين (فرينت- سرت) ولها أهمية في الهندسة التفاضلية. في هذه

القوانين k تسمى الانحناء أو التقوس، t يسمى الالتواء أو اللى، ومقلوب ذلك هما المقداران $\rho = 1/k$ و $\sigma = 1/r$ يسميان نصف القطر التقوس ونصف قطر اللى أو الالتواء على الترتيب.

96- (أ) أثبت أن نصف قطر الانحناء عند أي نقطة في المنحنى المستوى $y=f(x)$, $z=0$ حيث $f(x)$ دالة تفاضلية، يعطى بالعلاقة:

$$\rho=\left|\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}\right|$$

(ب) أوجد نصف قطر الانحناء (التقوس) عند النقطة $(\pi/2,1,0)$ للمنحنى $y = \sin x, z=0$.

الجواب: (ب) $2\sqrt{2}$.

97- أثبت أن العجلة (التسارع) لجسيم يتحرك على منحنى فراغي يعطى على الترتيب (أ) بالإحداثيات الأسطوانية. (ب) بالإحداثيات الكروية بالمقدارين الآتيين:

$$\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2\right)e_\rho+\left(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)e_\phi+\ddot{z}e_z$$

$$\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)e_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)e_\theta+\left(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta+r\ddot{\phi}\sin\theta\right)e_\phi$$

حيث النقط تشير إلى المشتقات الزمنية (المشتقة بالنسبة للزمن)، $e_\rho, e_\phi, e_z, e_r, e_\theta, e_\phi$ هي وحدة المتجهات في اتجاه زيادة $\rho, \phi, z, r, \theta, \phi$ على الترتيب.

98- بفرض E، H هما متجهان بفرض أن لهما مشتقات جزئية مستمرة (على الأقل من الرتبة الثانية) بالنسبة إلى الموضع والزمن. نفرض أيضا زيادة على ذلك أن E،H تحقق المعادلات.

$$\nabla.E=0, \quad \nabla.H=0, \quad \nabla\times E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \nabla\times H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (1)$$

أثبت أن E، H تحقق المعادلة.

$$\nabla^2 \downarrow=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \downarrow}{\partial t^2} \qquad (2)$$

[المتجهين E، H يسميان متجه المجال الكهربي، متجه الكهربي، متجه المغناطيسي في نظرية كهرو مغناطيسية المعادلات (1) حالة خاصة من معادلات مكسويل. النتيجة (2) قادت مكسويل إلى الاستنتاج أن الضوء ظاهرة كهرو مغناطيسية. المقدار الثابت c هو سرعة الضوء]

99- استخدام العلاقات في مسألة 98 لتوضيح أن:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(E^2+H^2\right)\right)+c\nabla(E\times H)=0$$

100- بفرض أن A_1,A_2,A_3 هي مركبات المتجه A في نظام الإحداثيات المتعامدة وهي xyz بوحدة المتجهات i_1,i_2,i_3 (المألوف i,j,k المتجهات)، $A'_1,\ A'_2,\ A'_3$ هي مركبات المتجه A في نظام الإحداثيات المتعامدة وهي $x'\ y'\ z'$ التي لها نفس نقطة الأصل مثل النظام $x\ y\ z$ لكن دور بالنسبة إليه وله وحدة المتجهات i'_1, i'_2, i'_3 . أثبت أن العلاقات الآتية (غالبا تسمى العلاقات الثابتة) من الضروري أن تكون صحيحة وهي:

$$A_n = l_{1n}A'_1 + l_{2n}A'_2 + l_{3n}A'_3 \quad n = 1,2,3$$

حيث $i'_m \cdot i_n = l_{mn}$

101- إذا كان A هو المتجه لمسألة 100، أثبت أن تباعد المتجه A أي أن $\nabla.A$، هو مقدار ثابت (غالبا يسمى ثابت عددي) أي أن . أثبت أن:

$$\frac{\partial A'_1}{\partial r'}+\frac{\partial A'_2}{\partial y'}+\frac{\partial A'_3}{\partial z'}=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

النتائج هذه وللمسألة السابقة تعبر بوضوح أن الكميات الفيزيائية لا يجب أن تعتمد على نظم الاحداثيات التي تلاحظ فيها. ومثل هذه الآراء عند تعميمها تقود إلى علم هام يسمى تحليل الكمية الممتدة التي هي أساس النظرية النسبية.

102- أثبت أن (أ) A.B (ب) A×B، (جـ) Δ×B تكون ثابتة تحت تأثير التحول من مسألة رقم 100.

103- إذا كانت u_1,u_2,u_3 إحداثيات منحنى الأضلاع العمودية، فأثبت أن:

$$\frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x,y,z)} = \nabla_{u_1}..\nabla_{u_2}\times\nabla_{u_3}$$ (أ)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial r}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial r}{\partial u_3}\right)\left(\nabla_{u_1}\cdot\nabla_{u_2}\times\nabla_{u_3}\right)=1$$ (ب)

وأعطي معنى لهذه بدلالة الجاكوبيان.

104- باستخدام التقارب البديهي للمتجهات أثبت العلاقة (8).

105- فئة n من المتجهات $A_1, A_2, ..., A_n$ تسمى تابعا خطيا إذا وجدت فئة من المقادير العددية $c_1, c_2, ..., c_n$ ليست جميعا صفر بحيث أن $c_1A_1+ c_2A_2 + ... +c_nA_n=0$ تطابقيا وإلا تسمى مستقلا خطيا.

(أ) أثبت أن المتجهات $A_1=2i-3j +5k, A_2=i+j-2k, A_3=3i-7j+12k$ تابع خطي.

(ب) أثبت أن أي أربعة من متجهات في ثلاثة أبعاد هي تابع خطي.

(جـ) أثبت أن الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتجهات.

$A_1= a_1u+b_1j+c_1k,\ \ A_2=a_2i+b_2j + c_2k, A_3=a_3i+b_3i +b_2j +c_3k$

خطية هو أن $A1.A2 \times A3 \neq 0$. وأعط تفسيرا هندسيا لهذا.

106- العدد المركب يمكن تعريفه كزوج مرتب (a,b) من الأعداد الحقيقية b,a نعرض لبعض قواعد من عملية الجمع والضرب.

(أ) ما هذه القواعد؟

(ب) كيف القواعد في الجزء (أ) يستعمل لتعريف الطرح والقسمة؟

(جـ) اشرح كيف يمكن اعتبار الأعداد المركبة كمتجهات في بعدين.

(د) اشرح التماثل والاختلاف بين العمليات المحتوية على أعداد مركبة والمتجهات المعتبرة في هذا الفصل.



الفصل الثاني

الهندسة الناقصية

Elliptic Geometry

الفصل الثاني

الهندسة الناقصية

Elliptic Geometry

"قد اعتبر نفسي ملكاً لفراغ لا نهائي، في الوقت الذي أكون فيه محصوراً في قوقعه"

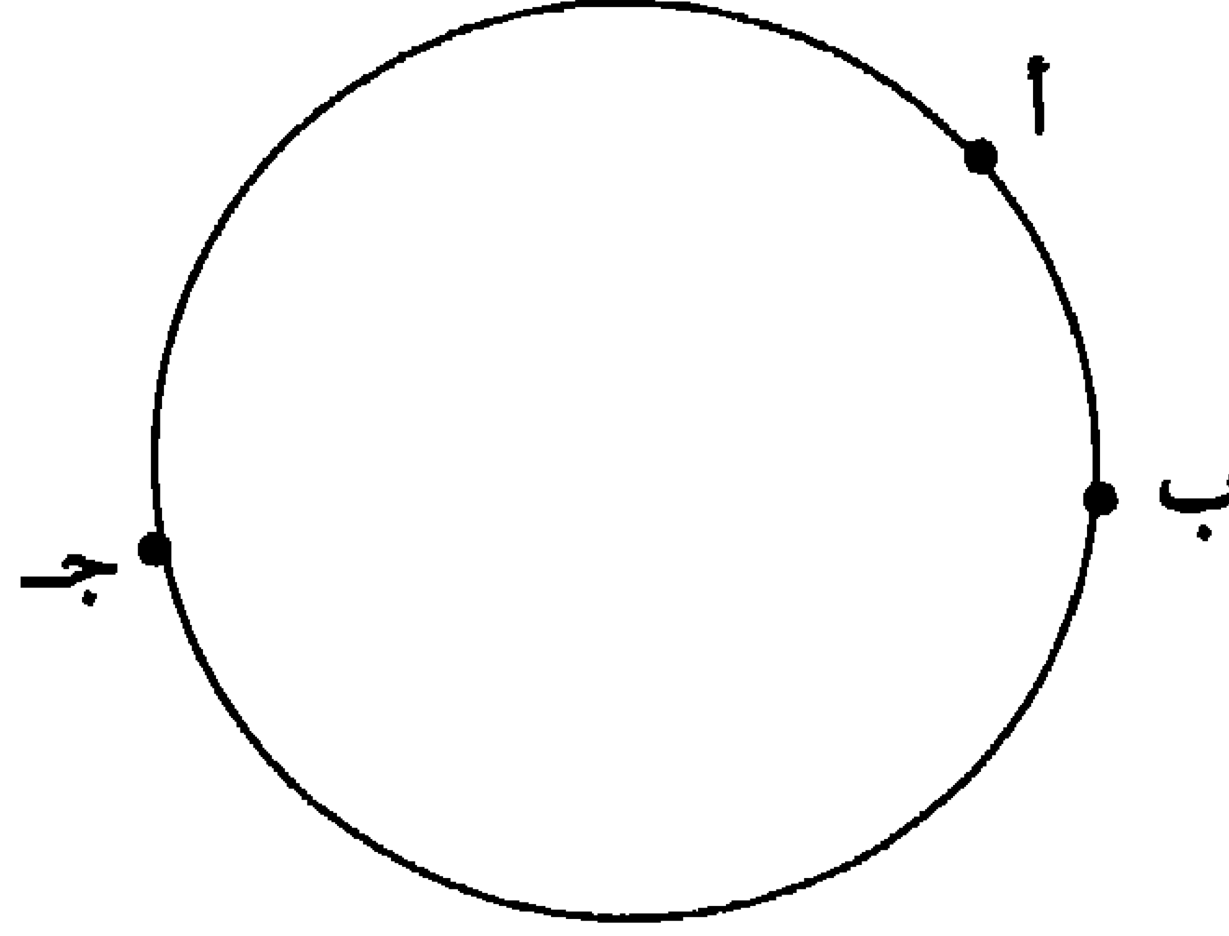
مقدمة:

نشر لوباً تشفسكي كتابه في الهندسة الزائدية، وقد أظهر فيه تصوراً جديداً للفراغ الفيزيائي، ومن ثم تبعه في ذلك الرياضية الألماني ريمان Riemann والذي درس على يدي جاوس أحد مكتشفي الهندسة الزائدية أيضاً.

لقد كان هنالك مبررات لاكتشاف الهندسة اللاإقليدية، منها أن خبرتنا بالعالم الفيزيائي، قادتنا إلى اعتقاد بأنه لا نهائي وغير محدود وذلك بسبب ضخامته، فالهندسة الإقليدية والزائدية تتفق مع هذه النظرة، وفي غياب البرهان العلمي لهذا الاعتقاد، فإننا لا نكون مجانين للصواب إذا اعتقدنا بوجود فراغ نهائي وضخم في نفس الوقت هكذا فكر ريمان، وقد وضح أنه يوجد فرق بين "اللانهائي" و"غير المحدود" على الخط فإن هنالك نقاطاً بعد تلك التي وصلنا إليها، فالدائرة على الرغم من أنها منتهية إلا إنها يغير محدودة. ومن هنا اقتراح ريمان الخاصية التالية للخطوط المستقيمة "جميع الخطوط المستقيمة منتهية وغير محدودة".

من معرفتنا السابقة بالهندسة الإقليدية والزائدية، نستطيع تحديد بعض ملامح الهندسة الجديدة، حيث الخطوط المستقيمة بها منتهية وغير محدودة كما نعلم أن وجود الخطوط المتوازية نتيجة لنظرية الزاوية الخارجية في المثلث، والتي بدورها نتيجة لفرض أن الخط المستقيم لا نهائي، إذن فالهندسة الجديدة لا تحوي خطوطاً متوازية.

حيث أن لا نهائية الخط المستقيم هي نتيجة لمسلمات البينية، لا نستطيع إذن الأخذ بمسلمات الترتيب (البينية) في الهندسة الجديدة، ولا نستطيع القول بأن النقطة ب تقع بين أ، جـ. إذن يجب حذف مسلمات البينية ويحل محلها مسلمات للفصل، ففي الشكل (9-1) نلاحظ أن النقطتين أ، جـ تفصلان ب، د على الدائرة حيث لا نستطيع الوصول إلى د من ب دون المرور بالنقطة جـ.



الشكل(9-1)

ونستطيع إعادة صياغة المفاهيم الهندسية، باستخدام مسلمات الفصل فمثلاً القطعة $\overline{أب}$ المكونة من النقطتين أ ، ب بالإضافة للنقاط الواقعة بينهما ليس لها معنى على الدائرة، كذلك يجب إعادة تعريف المثلث الذي يحدد بثلاثة رؤوس.

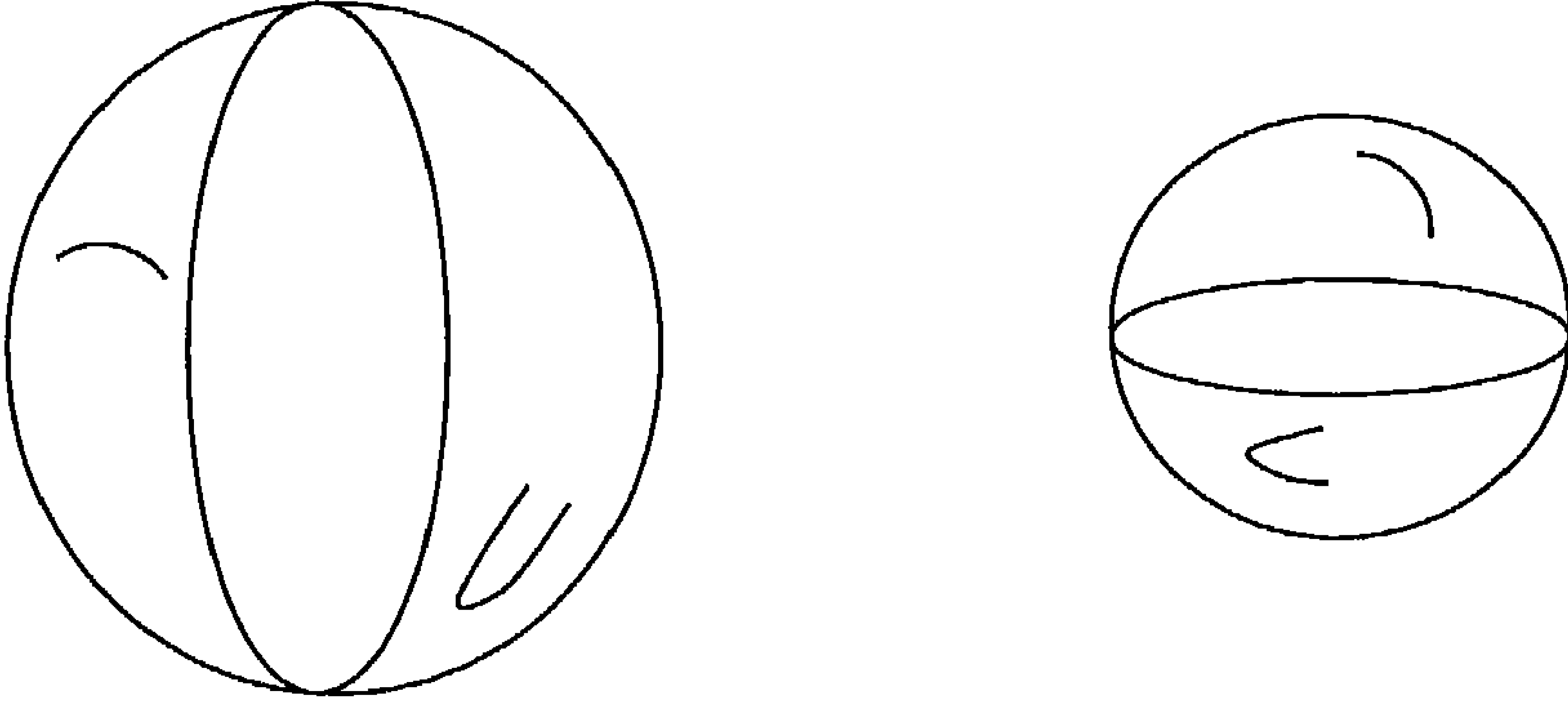
إن هنالك صعوبة في مسلمة الوقوع الأولى التي تؤكد عدم وقوع نقطتين مختلفتين على أكثر من مستقيم واحد، فهذا ليس صحيحاً في الدوائر العظمى على الكرة.

لقد استطاع ريمان، إيجاد فراغ تتحقق فيه فرضياته، وكان ذلك هو سطح كرة، حيث مثل فيه الخطوط المستقيمة بدوائر عظمى على سطح الكرة وسمى تلك الهندسة بالهندسة الناقصية ذات النقطتين، حيث تتقاطع المستقيمات بها في نقطتين، كذل يوجد هندسة ناقصية ذات نقطة واحدة، تتقاطع مستقيماتها في نقطة واحدة.

أما مسلمة التوازي الناقصية فهي "لا يوجد مستقيمات متوازية".

(2-9) التمثيل على سطح الكرة:

تبدو الهندسة الناقصية غريبــة، لكــن يمكــن تمثيلــها بصــدق وذلــك بواســطة المفاهيم والمصطلحــات الإقليديــة، وذلــك باســتخدام الهندســة الكرويــة الإقليديــة والجدول التالي يدج بعض المفاهيم الأساسـية في الهندسـة الناقصيـة ذات النقطتـين والتمثيل الإقليدي لها على سطح كرة كما في الشكل (2-9).



الشكل (2-9)

الهندسة الناقصية ذات النقطتين	التمثيل على سطح الكرة الإقليدية
نقطة	نقطة على سطح كرة ك
خط	دائرة عظمى على الكرة ك
سطح	سطح الكرة ك
قطعة مستقيمة	قوس من دائرة عظمى على ك
البعد بين نقطتين	طول أقصر قوس من دائرة يصل بين نقطتين
زاوية	زاوية كروية (مكونة من دوائر عظمى)
قياس الزاوية	قياس الزاوية الكروية

إن أكبر الدوائر المرسومة على سطح الكـرة، هـي تلـك الـتي يكـون نصـف قطرها مساوياً لنصف قطر الكرة، وتسمى بالدوائر العظمى (Great Circles) وهي بدورها تمثل الخطـوط المسـتقيمة في الهندسـة الناقصيـة، فخـط الاسـتواء وخطـوط الطول دوائر عظمى وكل دائرة تمر بالقطبين دائرة عظمى بينما باقي المدارات ليست بدوائر عظمى.

إن كل خطين مختلفـين يتقاطعـان في نقطتـين متقـابلتين (Opposite points) حيث تكونان في نهايتي قطر الكرة. فجميع الدوائر العظمى المارة بنقطـة تتقـاطع في نقطة أخرى مقابلة لها.

إن جميع الدوائر العظمى المعامدة لدائرة عظمى، تلتقـي في نقطتـين مختلفتـين تسمى كل منهما قطب (Pole) للخط المستقيم، وكل منها تقـع علـى بعـد يسـاوي نصف المسافة القصوى عن الخط المستقيم ويعرف ذلك البعد بالبعد القطـبي للكـرة (Polar distance).

إذا كانت أ ، ب جـ ثلاث نقاط مختلفة، فإنها تحدد ثلاثة أقواس وإن الشـكل المكـون مـن اتحـاد تلـك الأقـواس الثلاثـة يسـمى بـالمثلث الكـروي (Spherical triangle)، والنقاط تسمى برؤوس المثلث، بينما تسمى الأقــواس بـأضلاع المثلـث الكروي، أما الزوايا فبزوايا المثلـث الكـروي وقيـاس كـل منـها أقـل مـن 180 °، وشروط تطابق مثلثين كرويين هي نفسها شروط التطابق في الهندسة الإقليدية.

مجموع قياسات زوايا المثلث الكروي أكبر من 180° وإن مقدار تلك الزيـادة يسمى بالزيادة الكروية (Spherical excess) وقيمتها تساوي ق ∠أ + ∠ب | ق ∠ جـ) − ط ، حيث قياس الزوايا بالتقدير الدائري، ط هي النسـبة التقريبيـة، وكلمـا زاد مجمـوع قياسات زوايا المثلث كلما زادت مساحته، والعلاقة الصحيحة بينها هي:

م = نق^2 (ق∠أ + ق ∠ب+ق ∠ حـ− ط). حيث نق هو نصف قطـر الكـرة، أي أن المساحة تتناسب مع الزيادة الكروية.

نظرية (9-1):

الخط المستقيم المار بنقطتين متقابلتين ليس وحيدا.

البرهان: إذا كانت أ، ب نقطتين متقابلتين على الخط ق، فإنه يوجد نقطة جـ غير واقعة على ق.. (مسلمات الوقوع).

إذن يوجد خط مستقيم هـ يمر بالنقطتين أ ، جـ ويختلف عن ق. الخطان ق، هـ يتقاطعان في نقطة أخرى أ ولتكن س، نفرض أن ب ≠ س، إذن تقع س على أحد الأقواس الناتجة من تجزئة أ، ب للخط ق، وينتج أن الأقواس الناتجة من التجزئة غير متساوية إذن أ، س نقطتان غير متقابلتين على ق. وبذلك يكون ق الخط الوحيد المار بالنقطتين أ، س مما يناقض أن هـ يمر بهما أيضاً.

مما سبق نستنتج أن س = ب، أي أن هـ يمر بالنقطتين أ، ب كما يمر بهما ق أيضاً.

نظرية (9-2):

البعد بين نقطتين لا يزيد عن نق ط (يكون مساوياً إلى نق ط إذا كانت النقطتان متقابلتين وأقل من نق ط إذا كانتا غير متقابلتين).

البرهان: لتكن أ ب، بحيث أن م د إلى خط مستقيم ق مار بالنقطتين أ ، ب.

إذا كانت أ ، ب متقابلتين فإنهما تجزئان ق إلى قطعتين متساويتين بحيث تكون م، إحداهما بالضرورة وهي نصف خط مستقيم، أي أن طول م يساوي نق ط.

إذا كانت أ ، ب غير متقابلتين فإنهما تجزئان ق إلى قطعتين غير متساويتين وأقصرهما م. إذن طول م هو أقل من طل نصف الخط المستقيم أي أنه أقل من نق ط وبذلك تكون المسافة أ ب أقل من نق ط.

نظرية (9-3):

جميع نقاط المستوى في الهندسة الناقصية ذات النقطتين تقع على الخطوط المستقيمة المارة بنقطتين متقابلتين.

البرهان: لتكن أ، ب نقطتين متقابلتين، جـ أي نقطة في المستوى، إذا كان جـ تختلف عن أ ، ب فإنه يوجد خط مستقيم يمر بالنقطتين أ ، جـ كذلك يمر بالنقطة ب، لأنها مقابلة للنقطة أ. أي. أن حـ تقع على ذلك الخط.

نظرية (9-4):

جميع الخطوط المستقيمة المعامدة لخط مستقيم تتلاقى في نقطتين متقابلتين، بعد كل منهما عن الخد المستقيم يساوي $\frac{نق ط}{2}$.

إن هذه النقاط المتقابلة تسمى بالأقطاب Poles للخط المستقيم بينما المسافة $\frac{نق ط}{2}$ تسمى القطبي Polar distance.

نظرية (9-5):

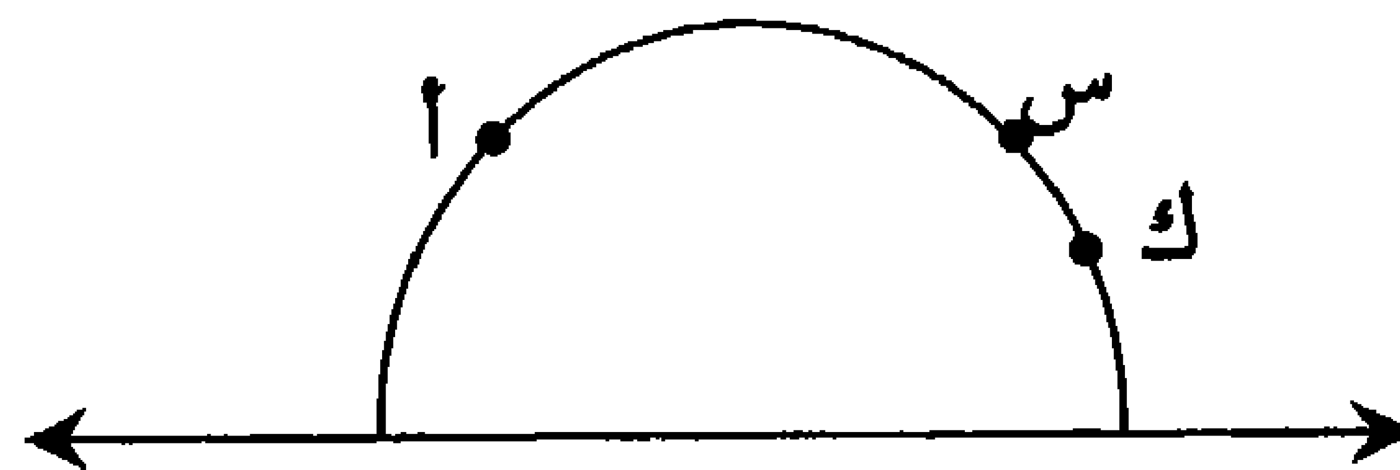
لأي نقطة يوجد خط مستقيم وحيد، بحيث تكون قطباً له.

أما الآن فما عدد الأعمدة على خط مستقيم والتي يمكن رسمها من نقطة معلومة؟ إنه عدد لا نهائي، إذا كانت النقطة قطباً للخط المستقيم، بينما يكون خطاً واحداً إذا لم تكن النقطة قطباً للخط، كما سنلاحظ ذلك في النظرية التالية.

نظرية (9-6):

من نقطة ليست قطباً لخط مستقيم معلوم، يوجد عمود وحيد من تلك النقطة على ذلك الخط.

البرهان: ليكن م خطاً مستقيماً، س قطباً له، أ هي النقطة المعلومة كما في الشكل (9-3). إذن يوجد قطب آخر للخط م غير النقطة أ. أي أن أ ، س نقطتان غير متقابلتين.



الشكل (9-3)

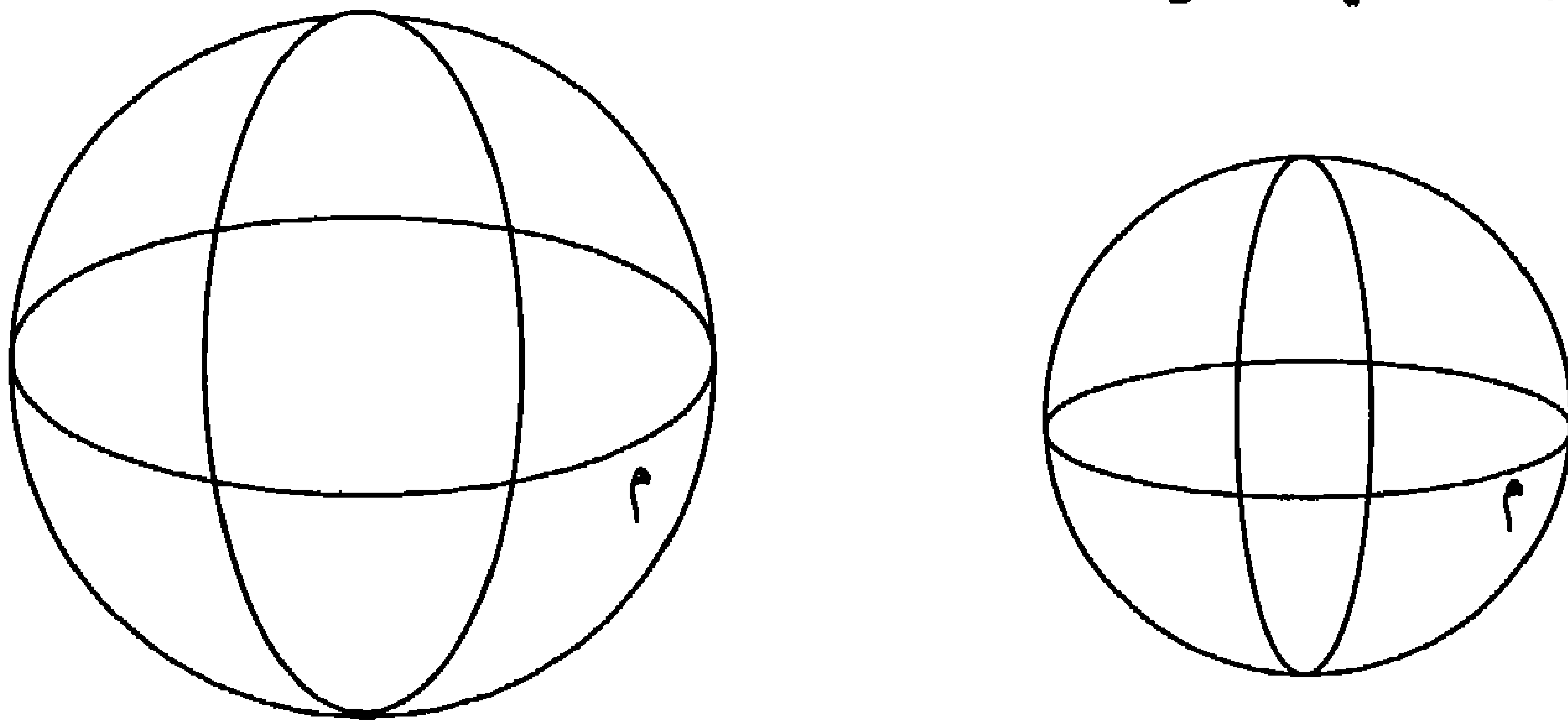
إذن يوجد خط مستقيم وحيد يمر بهما وليكن ك. وبالتالي فإن ك يعامد الخط م لأنه يمر بالقطب س.

نفرض أن ل خط آخر يمر بالنقطة أ وعمودي على الخط م، إذن ل يمر بالنقطة س، أي أن ل يمر بالنقطتين س، أ يناقض أن ك هو الخط الوحيد الذي يمر بالنقطتين أ ، س.

نظرية (9-7):

مجموعة الخطوط المعامدة لخط مستقيم تنطبق على مجموعة المستقيمات المارة بأقطاب ذلك الخط المستقيم.

إن النظريتين (9-4)، (9-7) تلقيان الضوء على طبيعة المستوى في الهندسة الناقصية ذات النقطتين، فجميع الخطوط المستقيمة المارة بنقطة ما تؤلف مجموعة نقاط المستوى كما في الشكل (9-4).



الشكل (9-4)

إن جميع النقاط غير الواقعة على م، تكون على مسافة من م أقل من $\frac{نق ط}{2}$ أو أكبر من $\frac{نق ط}{2}$، أي أن نقاط المستوى غير الواقعة على م، تنقسم إلى صفي تكافؤ منفصلين، بعد نقاط أحدهما أقل من $\frac{نق ط}{2}$ وبعد نقاط الآخر أكثر

$\frac{\text{نق ط}}{2}$، وإن كلاً من هذين الصفين يسمى بنصف مستوى (half plane)، وحدهما هو الخط م.

نظرية (9-8):

أي نقطتين متقابلتين لا تقعان في جهة واحدة من خط مستقيم.

البرهان: لتكن أ ، ب، نقطتين متقابلتين، م خط مستقيم لا يمر بهما، نفرض أن أ ،ب تقعان في جهة واحدة من م. إن تلك الجهة تحوي أحد أقطاب الخط المستقيم م.

لتكن س نقطة في تلك الجهة، إذن أ س < $\frac{\text{نق ط}}{2}$، ب س < $\frac{\text{نق ط}}{2}$.

أي أن أ س + ب س < نق، بما أن أ ب = نق ط (أ ، ب نقطتان متقابلتان).

إذن أ س + ب س < أ ب .... (1)

لكن الهندسة الناقصية نظام متري، إذن أ س + ب س ? أ ب، مما يناقض (1).

إذن أ ، ب ليستا في جهة واحدة من م.

وبالاعتماد على هذه النظرية نستطيع إثبات النظرية التالية:

نظرية (9-9):

قطبا الخط المستقيم يقعان في جهتين مختلفتين منه.

تمارين

1- إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإن أياً منها لا تقع بين الأخريين. برهن ذلك.

2- إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقاط على استقامة واحدة فأوضح بمثال أنه ليس من الضروري أن تقع إحداهما بين الأخريين.

3- إذا كانت أ، ب نقطتين مختلفتين، بحيث تقع إحداهما على خط مستقيم ل والأخرى واقعة عليه فإنهما غير متقابلتين.

4- القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على جهتي خط مستقيم تقطع الخط المستقيم في نقطة.

5- برهن صحة نظرية (9:9).

علاقات المثلث (Triangle Relations):

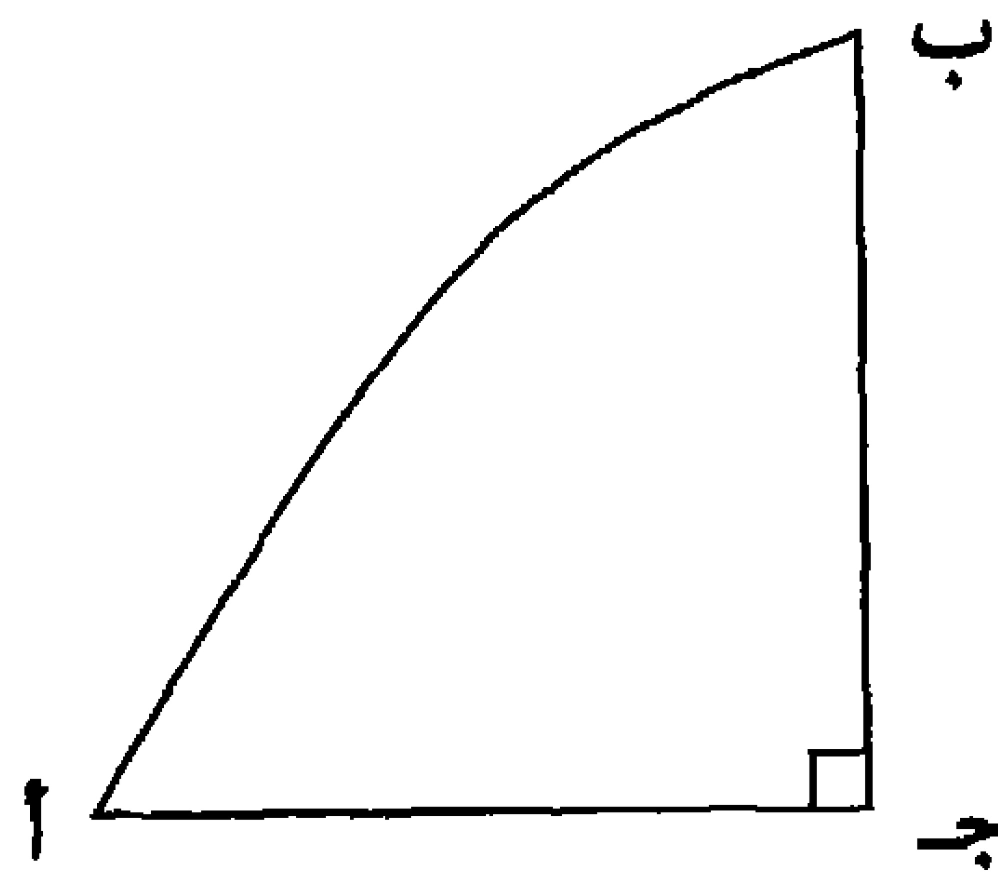
سنبرهن فيما يلي نظرية تعتبر مدخلاً لموضوع المثلثات في الهندسة الناقصية.

نظرية (9-10):

إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة فإن الزوايا الأخرى تكون حادة، قائمة أو منفرجة إذا وفقط إذا كان الضلع المقابل لهذه الزاوية أقل أو يساوي أو أكبر من $\frac{\text{نق ط}}{2}$ على الترتيب.

البرهان: ليكن أ ب حـ مثلث، ق ∡ ح = 90°، سنبرهن النظرية بالنسبة للزاوية أ، وسيكون نفس البرهان للزاوية ب.

(i) نفرض أن ب جـ = $\frac{\text{نق ط}}{2}$ كما في الشكل (9-5).



الشكل (9-5)

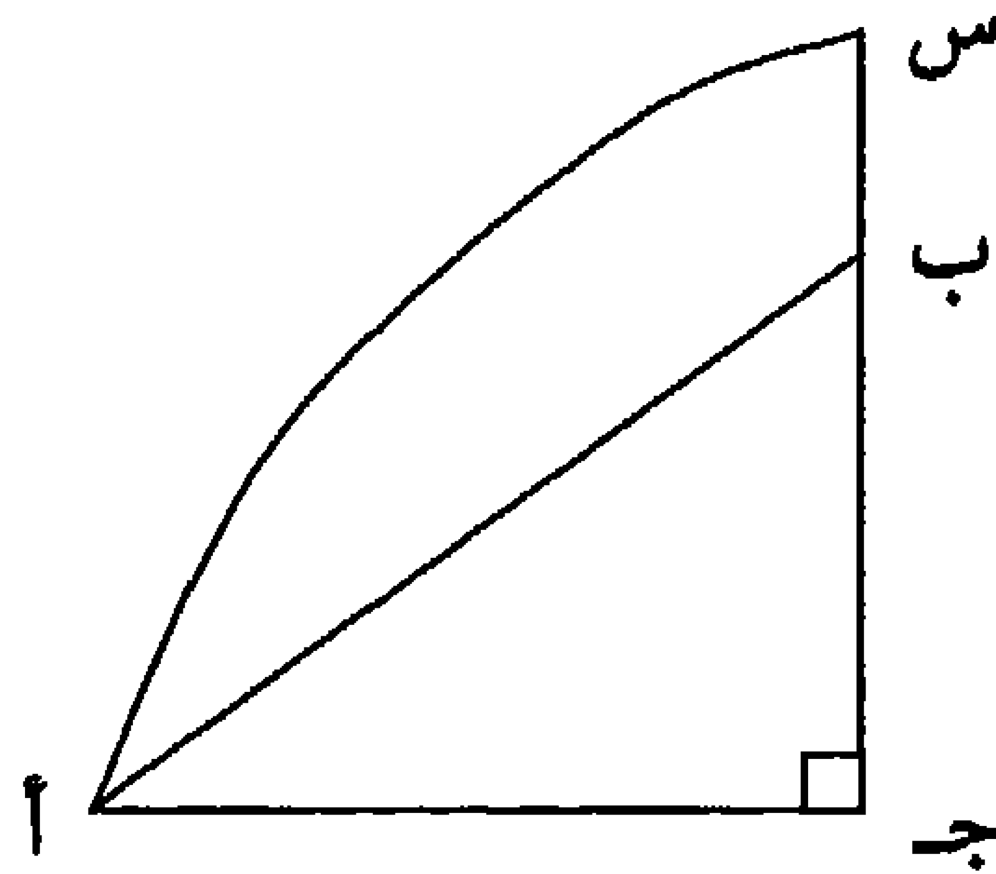
بما أن ق ∡ حـ = 90°، إذن ب قطب للخط $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$، بما أن الخطوط المارة بنقطة القطب تنطبق على الخطوط المعامدة للخط القطبي لتلك النقطة، إذن الخط $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يكون عموديا على $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$، أي)أن ق < أ = 90°.

العكس: نفرض أن ق∡ أ = 90° .

بما أن الخطين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ عموديان على $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ إذن النقطة ب تكون قطباً للخط $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$، طول الضلع أ ب = $\frac{\text{نق ط}}{2}$.

(ii) نفرض أن $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}} < \frac{\text{نق ط}}{2}$، كما في الشكل (9-6) لتكن س قطباً للخط $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ في الجهة التي تقع بها ب.

إذن النقاط أ، جـ س رؤوس مثلث، فيه ق >حـ أ س =س90°، كما هي)> أ حـ س.



الشكل (9-6)

وحيث أن الخط $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ المار بالرأس أ والنقطة ب، الواقعة على $\overleftrightarrow{\text{س حـ}}$ يجـزيء ≯ أ . إذن ≯ ب أ حـ حادة.د

العكس نفرض أن ≯ حـ أ ب حادة.

إذن النقطة ب ليست قطباً للخط $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$، كذلك ب حـ≠$\frac{\text{نق ط}}{2}$، إذا كان ب حـ > ≠$\frac{\text{نق ط}}{2}$، فإن $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يحوي القطـب س للخـط $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ أي أن الخـط $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ المـار بنقطة الرأس أ يجزيء ≯ ب أ حـ، وهذا مستحيل حيث أن ≯ ب أ حـ حـادة، س أ حـ قائمة، إذن ب حـ ≯$\frac{\text{نق ط}}{2}$.

(iii) نفرض أن ب جـ > $\frac{\text{نق ط}}{2}$.

بما أنه إذا كان ب حـ $\geq \frac{\text{نقط}}{2}$ أدى إلى أن ∢ أ قائمـة أو حـادة فـإن ب حـ $> \frac{\text{نقط}}{2}$ سيؤدي إلى أن ∢ أ منفرجة.

العكس: نفرض أن ∢ أ منفرجة.

بما أنه إذا كانت ∢ أ قائمة أو حـادة أدى إلى أن ب حـ $\geq \frac{\text{نقط}}{2}$ فـإن ∢أ منفرجة يؤدي إلى أن ب جـ $> \frac{\text{نقط}}{2}$.

تمارين

1- أثبت أنه في المثلث القائم الزاوية والذي زاويته الأخريين حـادتين يكـون الوتـر أكبر من أي من ضلعيه الآخرين.

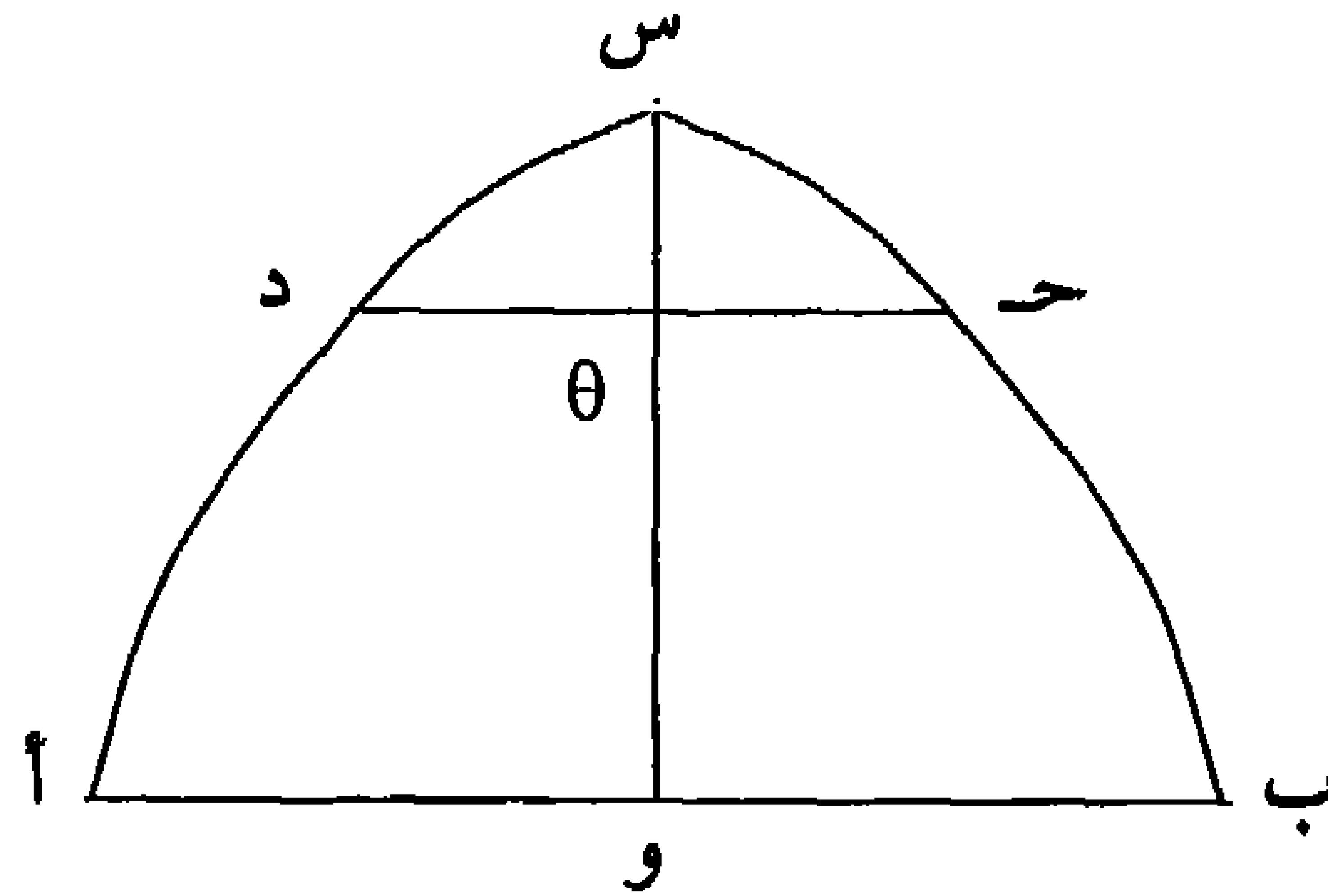
2- أثبت أن مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

3- برهن أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

الأشكال الرباعية:

الشكل المكون من النقاط أ، ب، جـ، د والتي لا يكن أي ثـلاث منـها علـى استقامة واحدة ومن القطع المستقيمة الوحيـدة أب ب جـ ، حـد ، أد يسـمى بالشـكل الرباعي أ ب حـ د، حيث أ ، ب، حـ، د رؤوسه أب ، ب حـ، حـد ، د أ، أضلاعه ∢أ، ب، ∢ حـ، ∢ د زواياه.

إذا كانت أ ، ب نقطتين غير متقابلتين، والنقطة س قطب للخط المستقيم أب كما في الشكل (9-7).



الشكل (9-7)

إذا كانت حـ، د نقطتين داخليتين على ب س ، أس علـى الـترتيب بحيـث أن أد=ب جـ فإن الشكل الرباعي أ ب حـ د يسمى بشكل سكاري الرباعي. فيه حـد القمة، أ ب القاعدة، ب حـ، أد الجانبان، ∢ حـ، ∢ زاويتا القمة ويجـب ملاحظـة أن د أ، حـب عموديين على أب .

نظرية (9-11):

زوايا القمة في شكل سكاري، متطابقة ومنفرجة والعمود المنصـف للقـاعدة يكون عموداً ومنصفاً للقمة أيضاً.

البرهان: سنبرهن فقط على أن زوايا القمة منفرجة، أما بقية الخصائص فـهي كما هي في الهندسة الزائدية.

ليكن أ ب حـ د شكل سكاري الربـاعي، الشكل (9-7)، النقطتـان هـ، و تنصفان القمة والقاعدة على الترتيب، بحيث أن هـو عمود على كل من حـد، أب.

إن للخط أب، وليكن النقطة س، لـذا ب س = أ س = و س= $\frac{\text{نقط}}{2}$ بما أن النقاط س،هـ، و على استقامة واحدة، س هـ جزء من س و، إذن س هـ > .

حيث أن الزاوية المقابلة للضلع سهـ في المثلث حـ س هـ أي أن ∢س حــ هـ حادة. إذن ∢ د حـ ب منفرجة.

كذلك باستخدام المثلث س د هـ، نحصل على أن ∢ حـ د أ منفرجة وهو المطلوب.

إن للشكل ب حـ هـ و مجموعة خصائص منها ما يلي:

1- ثلاث من زواياه قوائم.

2- طول كل من الضلعين اللذين تحصرهما الزوايا الثلاث أقل من $\frac{\text{نقط}}{2}$.

3- جميع نقاط الشكل الرباعي، ما عدا أضلاعه تقع في أحد نصفي المستوى الذي يقسمه أحد أضلاع الشكل.

سنسمي ذلك الشكل برباعي لامبرت Lambert Quadrilateral والزاوية غير القائمة بالزاوية الرابعة، وسنبرهن بعض الخصائص لشكل لامبرت بالنظريات التالية:

نظرية (9-12):

الزاوية الرابعة في شكل لامبرت منفرجة، وكل ضلع من ضلعيها المجاورين أقصر من الضلع المقابل له.

البرهان: الجزء الأول من البرهان كمثيله في الهندسة الزائدية.

لبرهان الجزء الثاني نفرض أن الشكل أ ب حـ د هو شكل لامبرت الرباعي والذي فيه ∢ منفرجة كما في الشكل (9-8).

الضلعان $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أد}}$ غير متساويين، وإلا ستكون زاويتي حـ د متساويتين. كما أن $\overline{\text{ب حـ}}$>$\overline{\text{أد}}$ غير ممكن لأنه إذا كان ب جـ > أ د.

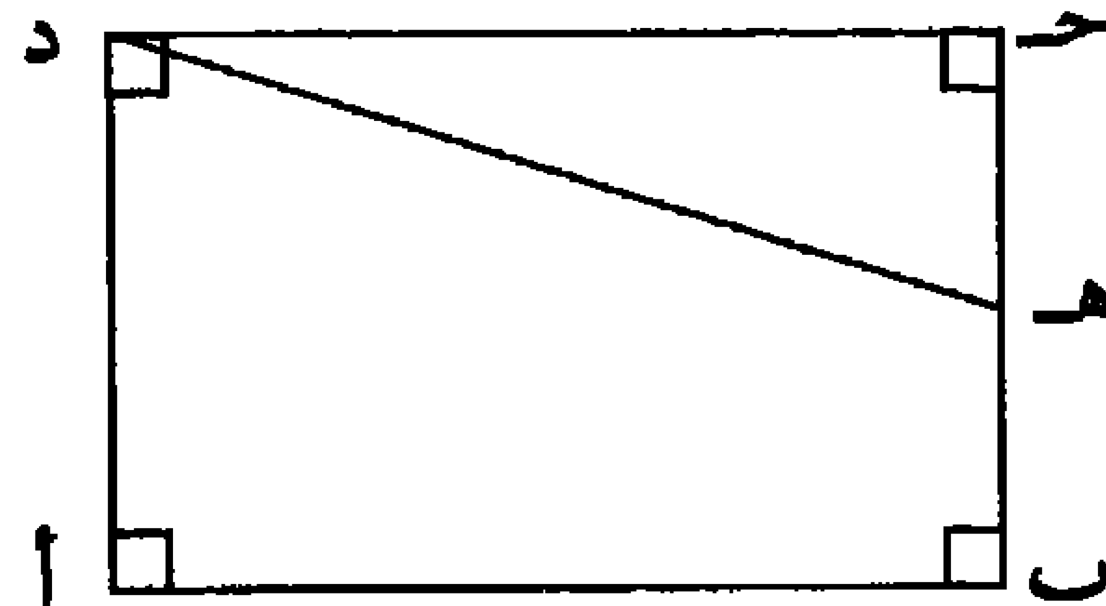
فإنه يوجد نقطة مثل هـ ∍ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث أن ب هـ = أ د. وبذلك يكون ق ∢ ب هـ د = ق ∢ أ د هـ حادة بينما)∢ ب هـ د منفرجة (!!!).

إذن ب حـ < أ د . وهو المطلوب.

سنذكر فيما يلي العلاقة بين القمة والقاعدة في شكل سكاري وذلك في النظرية التالية والتي سيترك برهانها لك.

نظرية (9-13):

قمة شكل سكاري أصغر من قاعدته.



الشكل (9-8)

تمارين

1- كل نقطتين في شكل سكاري أو لامبرت غير متقابلتين. لماذا؟ مع التوضيح.

2- كيف يمكن الحصول على شكل سكاري من شكل لامبرت.

3- برهن النظرية (9-13).

مجموع قياسات زوايا المثلث The Angle Sum of A Triangle :

إذا كان أحد رؤوس مثلث عبارة عن قطب للضلع الذي يقع عليه الرأسان الآخران، فإن الزوايا التي تقع على هذين الرأسين تكونان قائمتين وبذلك يكون مجموع قياسات زوايا المثلث أكبر من 180°، وسنثبت فيما يلي أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث أكبر من 180°، وفي البداية سنبرهن الحالة الخاصة التالية:

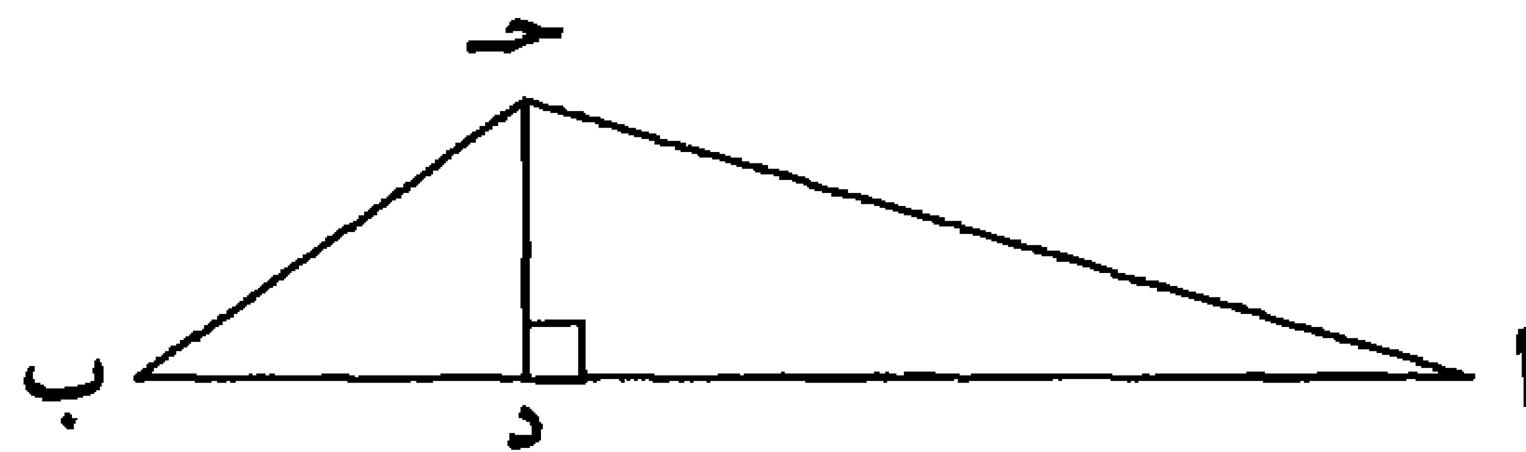
نظرية (9-14):

مجموع قياسات زوايا المثلث القائم الزاوية أكبر من قائمتين إن هذه النظرية تتحقق في المثلث الذي ليس فيه زاوية حادة، أو أن إحدى زواياه حادة فقط، ونحتاج لأخذ الحالة التي تكون فيها إحدى زواياه قائمة والزاويتان الأخريان حادتين، حيث يكون الضلع المجاورة للقائمة أقل من $\frac{\text{نق ط}}{2}$، والبرهان كما في الهندسة الزائدية (مع الفارق في النتائج).

نظرية (9-15):

إن هذه النظرية تتحقق في المثلث الذي ليس له زاوية حادة أو أن إحدى زواياه حادة فقط.

سنأخذ المثلث أ ب حـ، الذي له الزاويتان أ ، ب حادتان كما في الشكل (9-9) إن العمود النازل من حـ على $\overline{\text{أب}}$ يقطعه في د، ويجزيء هذا العمود المثلث أ ب د إلى المثلثين القائمي الزاوية أ د حـ، ب د حـ حيث يكون ق ∢ أ حـ د + ق ∢ ب حـ د = ق د أ حـ ب ومجموع قياسات زوايا المثلثين أكبر من 360°، حسب نظرية (9-14).



الشكل (9-9)

لكن ق ∢ أ د حـ + ق ∢ حـ د ب = 180° .

إذن مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب حـ أكبر من 180°.

يسمى الفرق بين مجموع قياسات زوايا المثلث والقائمتين بالزيادة المثلثية (Triangle Excess) والذي يمكن أن يختار كوحدة لقياس المساحة على غرار الانحراف المثلثي في الهندسة الزائدية.

نتيجة: مجموع قياسات زوايا أي شكل رباعي أكبر من أربع قوائم.

تمارين

1- أثبت أنه إذا ساوى قياس زوايا مثلث قياس زوايا مثلث آخر على الترتيب فإن المثلثين متطابقان. (أي أن المثلثات المتشابهة متطابقة في الهندسة الناقصية).

2- أ. أعط ثلاث عبارات أو أكثر تكون صحيحة في كـل مـن الهندسـات الثـلاث مجتمعة.

ب. أعط ثلاث عبارات تكون صحيحة في :

(i) الهندسة الإقليدية (المكافئية) فقط.

(ii) الهندسة الزائدية فقط.

(iv) الهندستين الإقليدية والزائدية معاً.

(v) الهندستين الزائدية والناقصية معاً.

3- بين كيفية رسم مثلث إذا علمت زواياه الثلاثة.



الفصل الثالث

الاقترانات المطابقة (المشاكلة)

Conformal mappings

الفصل الثالث

الاقترانات المطابقة (المشاكلة)

Conformal Mappings

نتعرض في هذا الفصل لفكرتي الاستمرار التحليلي والاقتران المطابق. أما فكرة الاستمرار التحليلي فسنعرفها بأسلوب بسيط في البند الأول، أما البند الثاني فسيعرض تعريف الاقتران المطابق وبعض الخصائص العامة لها وكذلك بعض نتائجها.

إن أهمية الاقترانات المطابقة تكمن في وجود تطبيقات هندسية وفيزيائية كثيرة لها والتي سنعرض لها في البند 5 أم البند الثالث فقط خصص لأمثلة هامة وخاصة للاقتران المطابق مثل الاقتران مزدوج الخطية. أما تحويل شوارتز كريستوفل فقد تم عرضه في البند 4.

الاستمرار التحليلي (Analytic Continuation):

قبل أن نعرف فكرة الاستمرار التحليلي بشكل مجرد يجدر بنا أن نقدم لها بمثال ليسهل فهم هذه الفكرة. إذا فرضنا أن لدينا الاقتران.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

فإنه يمكن أن نتبين أن نصف قطر التقارب لهذا الاقتران (متسلسلة القوى) هو 1 وأن مجال تقاربها هو القرص المفتوح $|z|<1$ وعلى هذا المجال فإن هذا الاقتران عبارة عن متسلسلة الهندسية:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z},|z|<1 \qquad \text{..........(1)}$$

وإذا بحثنا في الاقتران g(z) حيث:

$$g(z)=\frac{1}{1+z} \qquad ....(2)$$

نجد أنه تحليلي لجميع قيم z ?-1 لأنه غير معرف عند z =-1 وبالمقارنة بين الاقترانين (1)، (2) نجد أنهما يتوافقان على المجال المفتوح |z| <1 وتختلفان خارجة في مثل هذه الحالة يسمى الاقتران g(z) استمراراً تحليلياً للاقتران f عند أي نقطة z ?1 (أي على كل المستوى عدا z=-1) على أي مسار يصل بين أي نقطتين إحداهما داخل المجال |z| <1 والأخرى خارجة.

ولتبسيط الفكرة أكثر نعرفها على مرحلتين الأولى تسمى الاستمرار التحليلي البسيط والأخرى الاستمرار التحليلي على مسار C. الفكرة الأولى في التعريف التالي:

تعريف:

لنفرض أن الاقتران f تحليلي على المجال D وأن الاقتران g تحليل على المجال S فإن الاقتران g يسمى استمراراً تحليلياً بسيطاً للاقتران f إلى المجال S إذا تحقق الشرطان:

أ- $S \cap D = \phi$

ب- $f(z) = g(z)$ لكل z في $S \cap D$

النظرية التالية تمثل إعادة صياغة للنظري V-59.

نظرية:

إذا كان الاقتران f تحليلياً على المجال D بحيث أن f(z)=0 لكل z جوار (مفتوح) في المنطقة الداخلية للمجال D فإن f(z)=0 لكل z في D.

البرهان: نفرض أن z_0 نقطة في الجوار (المفتوح) N والواقع في المنطقة الداخلية للمجال D فإن $f(z_0)=0$ وبما أن f تحليل على D فإن نظرية V-59 تؤكد أنه إما

تكون $f(z)=0$ لكل z في D أو أن z_0 صفر معزو ل للاقتران f وبما أن z_0 ليس صفراً معزولاً للاقتران لكون $f(z)=0$ لكل z في N فإن $f(z)=0$ لكل z في D.

ومما يجدر الإشارة إليه أن النظرية السابقة تبين أن الاستمرار التحليلي لاقتران ما إن وجدت فإنها تكون واحدة ووحيدة. انظر التمرين (1).

مثال:

برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي البسيط أن:

$$\cos^2 z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

الحل:

لنفرض أن الاقترانf معرف بالمساواة التالية:

$$f(z) = \cos^2 z$$

وهذا الاقتران تحليلي لكل z في المستوى المركب وكذلك نعرف الاقتران g بالمساواة.

$$g(z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$

وهو كذلك اقتران تحليل لكل z في المستوى المركب. ولكن من المعلوم من العلاقات المثلثية أن:

$$g(x)= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = f(x)$$

لكل عدد حقيقي x وبالتالي فإن g تمثل الاستمرار التحليلي للاقتران f. وبالاستفادة من النظرية السابقة فإن $f=g$ لكل عدد حقيقي يؤكد بأن $f(z) = g(z)$ لكل عدد مركب أي أن:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

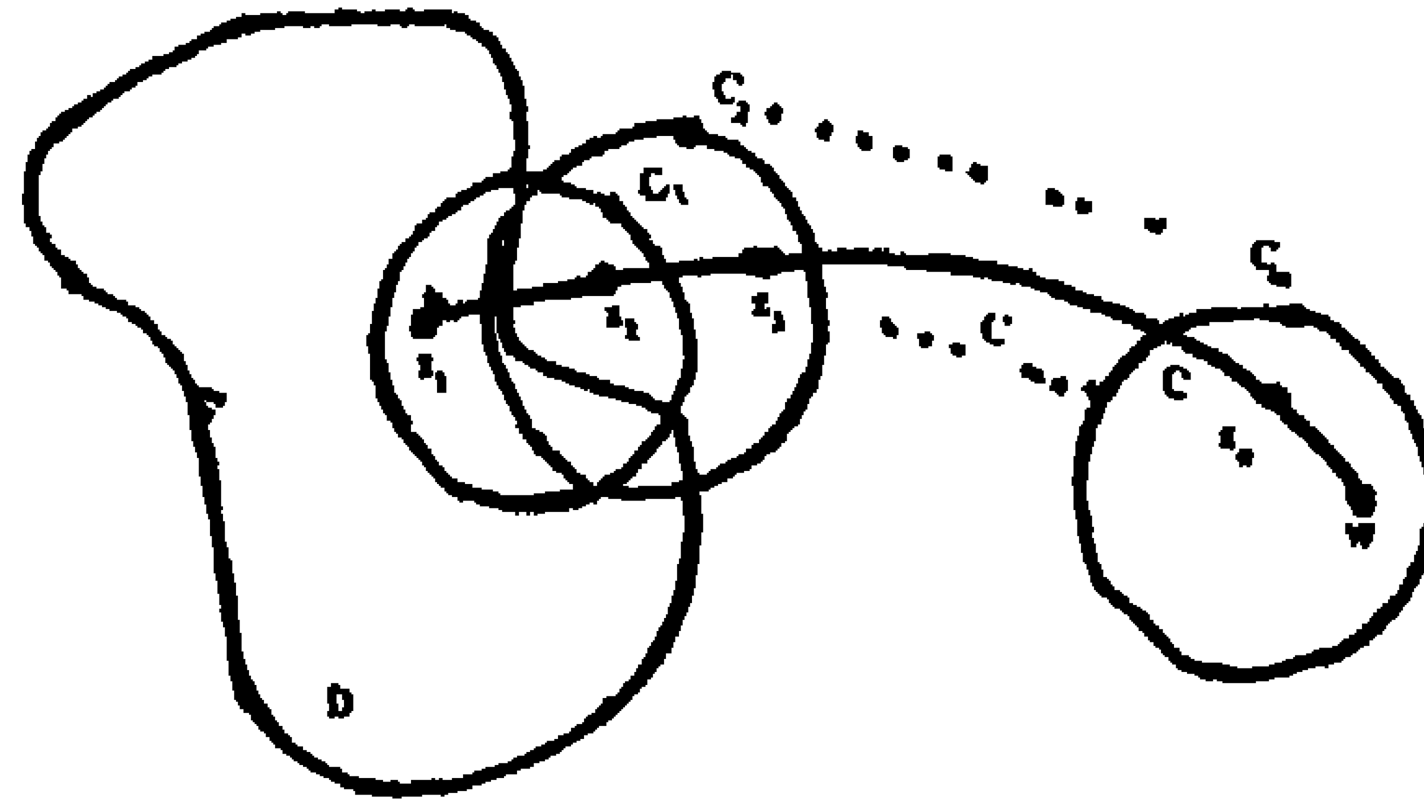
أما الاستمرار التحليلي على مسار فهو معرف فيما يلي:

تعريف:

نفرض أن الاقتران f تحليلي على المجال D. وأن النقطة w خارج المجال D. نريد أن نبحث عن استمرار تحليلي بسيط للاقتران f عند النقطة z في D والتي يصل بينها وبين النقطة w المسار C وذلك بتمثيل الاقتران f بمتسلسلة تايلور عند النقطة z_1 وهي:

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(z_1)}{k!}(z-z_1)^k \qquad ....(3)$$

وهذه المساواة صواب على فرص التقارب D_1 الذي مركزه z_1 ومحيطه الدائرة C_1 انظر الشكل (1).



شكل (1)

فيصبح جزءاً من المسار C داخل الدائرة C_1 فإذا فرضنا أن z_2 تقع على المسار C وهي خارج المجال D فإن $f(z_2)$ تسمى الاستمرار التحليل البسيط للاقتران f إلى النقطة z_2. ثم نبحث عن استمرار تحليلي بسيط للاقتران f عند النقطة z_2 وذلك بإيجاد تمثيل للاقتران f_1 (3) بمتسلسلة تايلور عند النقطة z_2 والتي تتحقق ضمن فرص التقارب D_2 الذي مركزه z_2 ومحيطه C_2 وهكذا يصبح جزء من المسار C داخل الدائرة C_2 فإذا كانت z_3 تقع على هذا المسار C وداخل C_2 ولكنها خارج C_1 فإن $f_2(z_3)$ عبارة عن الاستمرار التحليلي البسيط للاقتران (3) عند z_3 وهكذا بعد تكرار العملية السابقة n خطوة نحصل على النقاط التالية $z_1,z_2,....,z_n$ التي تقع على المسار C وتمثل مراكز الدوائر $C_1,C_2,....,C_n$ على الترتيب بحيث إن C_n تحتوي على النقطة w بداخلها وكذلك نحصل على الاقترانات $f_1,f_2, \ ...,f_n$ بحيث f_k

استمرار تحليلي بسيط للاقتران f_{k-1} عند z_k وفي هذه الحالـة يسـمى الاقـتران $f_n(w)$ استمرار تحليلياً للاقتران f عند w على المسار C.

ومما يجدر ذكره أنه قد لا يوجد استمرار تحليلي لاقتران ما عند نقطـة خـارج مجاله عند مسار ما وإن وجد يمثل ذلـك الاسـتمرار التحليلـي فإنـه يكـون واحـداً ووحيداً. كذلك يمكن أن نؤكد أن الاقتران التحليلي f على مجال D تتحـدد قيمتـها تماماً بقيمتها على مسار داخل D.

الأمثلة التالية توضح فكرة الاستمرار التحليل على مسار ما.

مثال:

الاقتران $g(z)=\frac{1}{1+z}$ يمثل الاستمرار التحليلي للاقتران f(z) عند أي نقطـة $z\neq -1$ على أي مسار يصل إليها بحيث:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k=\frac{1}{1+z}, |z|<1.$$

مثال:

نفرض أن الاقتران f معرف بالمساواة

$$f(z)=-i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n$$

فبين أن الاقتران $g(z)=\frac{1}{z}$ استمرار تحليلي للاقتران f من مجال تقاربـها f إلى المستوى المركب z بحيث $z\neq 0$.

الحل:

نلاحظ أن مجال التقارب للاقتران f هو القرص $|z-i|<1$ وحيث إنـــها متتاليـة هندسية فإنها تتقارب على هذا المجال للاقتران:

$$f(z)=-i\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}=\frac{1}{z}$$

وبالتالي فإن $f(z)=g(z)=\frac{1}{z}$ لكل z في المجال $|z-i|<1$ (ما عـدا بـالطبع z=0)

وبالتالي فإن g تمثل الاستمرار التحليلي للاقتران f على جميع الأعداد المركبة $z\neq0$.

مثال:

جد قيمة الاستمرار التحليلي للاقتران f حيث:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k}$$

عند النقطة 1- على مسار يصل بين النقطة 1 والنقطة 1- في النصف السفلي من المستوى.

الحل:

بإيجاد نصف قطر التقارب للاقتران f وهو 1 حيث إن قرص التقارب هـو $D:|z-1|<1$ وكذلك يمكن أن نتعرف على أن هذا الاقتران يتوافق مـع الاقـتران g حيث:

$$g(z)=\log z$$

شكل (2)

ما عدا بالطبع $z=0$ وكل النقاط التي تقع على الجزء السالب من المحور الحقيقي وبما أن 1- تقع خارج مجال التقارب D فإننا نريد أن نبحث عن استمرار تحليلي للاقتران f عند 1- على المسار C الذي يصل بين النقطتين 1،1-.

وبما أن الاقتران logz متعدد القيمة فإنه يمكن اختيار الفرع المناسب لهذا الاقتران فمثلاً يمكن أن نجد الاستمرار التحليلي إلى النقطة z_2 لنحصل على g_2 داخل الدائرة C_2 أي أن الاقتران:

$$g_2(z) = \ln|z| + i\arg z, -2\pi \leq \arg z < 0$$

تمثل فرعاً مناسباً، فهو يوافق lgoz عند z_2، وبالتالي يوافق f عند z_2 وهكذا نبحث عن استمرار تحليلي للاقتران g_2 عند z_3 داخل الدائرة C_3. فنختار فرعاً مناسباً للاقتران logz وهو كذلك g_4 حيث:

$$g_4(z) = \ln|z| + i\arg z, -2\pi \leq \arg z < 0$$

وحيث إن 1- تقع داخل الدائرة C_4 فإن قيمة الاستمرار التحليلي عند 1- وهو:

$$g_4(-1) = -\pi i$$

أي أن:

$$f(-1) = g_4(-1) = -\pi i$$

تمارين

1- بفرض أن g,f اقترانان تحليليان على المجال D بحيث إن g(z)=g(z) لكل z في جوار (مفتوح) في المجال D. بين أن f(z)=g(z) لكل z في D.

2- إذا كان الاقتران g استمراراً تحليلياً للاقتران f من المجال D إلىالمجال S فبرهن أن الاقتران:

$$h(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D \\ g(z), & z\in S \end{cases}$$

وحيدة القيمة على المجال $D\cup S$

3- بين أن الاستمرار التحليل لاقتران ما f (إن وجد فإنه) واحد ووحيد.

اقتراح : استعن بالتمرين 1.

4- بفرض أن الاقتران f تحليل على المجال D وأن (z_n) متتالية من نقاط D تقاربية للنقطة z_0 في D كذلك فإذا كان $f(z_n)=0$ لكل $n = 1,2, \ldots$. فبرهن أن f(z)=0 لكل z في D.

اقتراح: استعن ببرهان نظرية VII -2 بعد أن تبين أن f(z0)=0 لكون الاقتران متصلاً وأنه صفر غير معزول للاقتران f.

5- بفرض أن g,f اقترانان تحليليان في المجال D بحيث إن $f(z_n)$-$g(z_n)$ لكل $n = 1,2,\ldots$ حيث (z_n) متتالية من نقاط D تتقارب للنقطة z_0 في D فبرهن أن f(z)=g(z) لكل z في D.

اقتراح: استعن بالتمرين السابق.

6- إذا كان الاقتران f معرفاً بالمساواة $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)+\frac{(z-1)^k}{k}$ فبين أن قيمة الاستمرار التحليلي له عند النقطة $z=-1$ على مسار يصل بين النقطة 1 و 1- ويقع في النصف العلوي للمستوى هو πi.

7- إذا كان f تحليلياً عند z = 0 وأن:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}, n=1,2,.....$$

جد قيمة f(z).

8- برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي أن: $\cos^2 z+\sin^2 z=1$

9- برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي كذلك أن: $e^{-z}. e^{z}=1$

10- استعن بالتمرين 1 وبفكرة الاستمرار التحليلي على مسار لإثبات أن الاقتران التحليلي على مجال D يحدد تماماً بقيمه على D أو بقيمة على مسار داخل D.

11- بين أن الاقتران $g(z)=\frac{1}{z}$ استمرار تحليلي للاقتران.

$$f(z)=i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{i}\right)^n$$

عند أي نقطة z في المستوى (عدا z = 0 بالطبع)

12- بين أن الاقتران g المعرف بالمساواة.

$$g(z)=\sqrt{|z|}\,e^{\frac{1}{2}z\arg z}, |z|>0, \frac{\pi}{2}<\arg z<2\pi$$

يمثل استمرار تحليلياً للاقتران f من النصف العلوي للمستوى إلى النصف السفلي منه مروراً بالجزء السالب من المحور الحقيقي حيث إن f معرف بالمساواة.

$$g(z)=\sqrt{|z|}\,e^{\frac{1}{2}z\arg z}, |z|>0, 0<\arg z<\pi$$

13- بين أن الاقتران $g(z)=\frac{1}{1+z^2}$ يمثل استمرار تحليليا للاقتران.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

إلى جميع نقاط المستوى ما عدا z = -i, z = +i

14- بين كذلك أن الاقتران $z\neq0, g(z)=\frac{1}{z^2}$ يمثل استمراراً تحليلياً للاقتران.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^{n}$$

إلى جميع نقاط المستوى ما عدا $z=0$.

2-VII الاقتران المطابق (المشاكل):

إذا فرضنا أن الاقتران f تحليلي عند نقطة z_0 فإنه يمكن تمثيله بمتسلسلة تايلور

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+.....$$

وكذلك يمكن كتابتها على الصيغة:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+g(z)(z-z_0)$$

حيث إن:

$$g(z)=\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)+\frac{f'''}{3!}(z-z_0)^2+....$$

وتحقق:

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=0$$

وبالتالي إذا قصرنا بحثنا في خصائص الاقتران f موضعياً عند z_0 أي في جوار (مفتوح) وصغير مركزه z_0 فإن الاقتران f يمكن أن يقرب باقتران خطي.

$$f(z) \cong f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$$

ومن المعروف أن تأثير الاقتران الخطي $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ عبارة عن انسحاب بمقدار $f(z_0)$ ثم دوران بمقدار $\arg f'(z_0)$ وكذلك تكبير بمقدار $|f'(z_0)|$ (الذي يسمى معامل القياس) وأن الاقتران الخطي بالتالي يحافظ على الزوايا بين المسارات المارة في z_0 فهل يكتسب الاقتران التحليلي مثل هذه الصفة وهي المحافظة على الزوايا بين المسارات المتقاطعة في نقطة ما، هذه الفكرة يبرزها التعريف التالي:

تعريف:

إذا كان الاقتران f تحليلياً عند z_0 ويحافظ على الزاوية مقداراً واتجاهاً بين المسارات المتقاطعة في النقطة z_0 فإنه يسمى اقتران مطابق (مشاكل) (Conformal Mapping) النظرية التالية تبين الشرط الذي يلزم تحققه ليكوين الاقتران f مطابقاً.

نظرية:

أ- بفرض أن الاقتران f تحليلي عند النقطة z_0 وكانت $f'(z_0)$?0 فإن f يكون مطابقاً (أي يحافظ على الزاوية مقداراً واتجاهاً بين المسارات المتقاطعة في النقطة z_0).

ب- وكذلك إذا كان الاقتران f مطابقاً فإنه يكون تحليلياً.

البرهان:

أ- لنفرض أن C_2,C_1 مساران متقاطعان في النقطة z_0 ومعرفان بالمعادلتين $a \le t \le b, z_1(t), z_2(s), c \le s \le d$ فتكون الزاوية بين C_2,C_1 هي الزاوية بين المماسين لهما وهي θ حيث:

$$\theta = \arg z_2'(s) - \arg z_1'(t)$$

حيث إن $z_0 = z_1(t_0) = z_2(s_0)$

وكذلك إذا فرضنا أن الاقتران f ينقل المسارين C_2,C_1 إلى المسارين γ_2,γ_1 على الترتيب فإن γ_2,γ_1 معرفان بالمعادلتين:

$$w_2 = f(z_2(s)), w_1 = f(z_1(t)), c \le s \le d, a \le t \le b$$

وتكون الزاوية بين γ_2,γ_1 هي الزاوية بين المماسين لهما وهي ϕ حيث:

$$\phi = \arg w_1' - \arg w_1'$$

وبشكل عام إذا فرضنا أن γ يمثل بالمعادلة:

$$w = f(z(t)),\ a \le t \le b$$

فإن قانون السلسلة يؤكد أن:

$$w'(t) = f'(z)z'(t)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{cases} w_1'(t_0) = f'(z_0)z_1'(t_0) \\ w_2'(s_0) = f'(z_0)z_2'(s_0) \end{cases}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\begin{cases} \arg w_1' = \arg f'(z_0) + \arg s_1'(t_0) \\ \arg w_2' = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(s_0) \end{cases}$$

وإذا كان $f'(z0) \neq 0$ فإن $\arg f'(z_0) \neq 0$ وبالتالي يكون:

$$\arg w_2' - \arg w_1' = \arg_2'(s_0) - \arg z_1'(t_0)$$

وبالتالي فإن $\phi = \theta$ أي أن الاقتران حافظ على الزوايا بين المسارين مقدارا واتجاها وهي بالتالي تكون مطابقة وهذا ينهي إثبات النظرية.

إذا كان الاقتران مطابقا عند كل نقطة في مجال D فإنه يسمى مطابقا على D. أما إذا كان الاقتران تحليليا عند z_0 ولكن $f'(z_0) = 0$ فإنه لا يكون مطابقا عند z_0 وهنا تسمى z_0 نقطة حرجة للاقتران f وقد يكون مطابقا عند نقطة أخرى. فإذا فرضنا أن $f'(z_0) = 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^m g(z)$$

حيث إن g(z) تحليلي عند z_0, $g'(z_0) \neq 0$. لاحظ أن g(z) مطابقة وبالتالي تحافظ على الزوايا.

وإذا كان C مسارا ممهدا يمر بالنقطة z_0 ومعرف بالمعادلة $z(t), z_0 = z(t_0), a \le t \le b$ فإن صورة هذا المسار C هو γ حيث تكون γ معرفة بالمعادلة.

$$w - w_0 = f(z(t)) - f(z(t_0)) = (z(t) - z_0(t))^m g(z(t))$$

وبالتالي فإن:

$$\arg(w - w_0) = \arg(f(z) - f(z_0))$$

$$= m\arg(z - z_0) + \arg g(z)$$

فإذا فرضنا أن:

$$\arg g(z) = \alpha \lim_{z \to z_0} \arg(z - z_0) = \beta,$$

$$\lim_{w \to w_0} \arg(w - w_0) = \delta$$

فإن :

$$\delta = m\beta + \alpha$$

فإذا كانت زاويتا ميل C_2,C_1 هما على الترتيب β_2,β_1 فإن δ_2,δ_1 همـا زاويتـا ميل المسارين γ_2,γ_1 اللذين يمثلان صورتي C2,C1 على الترتيب تحت f ومــن ذلـك ينتج أن:

$$\delta_2 - \delta_1 = (m\beta_2 + \alpha) - (m\beta_1 + \alpha)$$

أي أن:

$$\delta_2 - \delta_1 = m(\beta_2 - \beta_1)$$

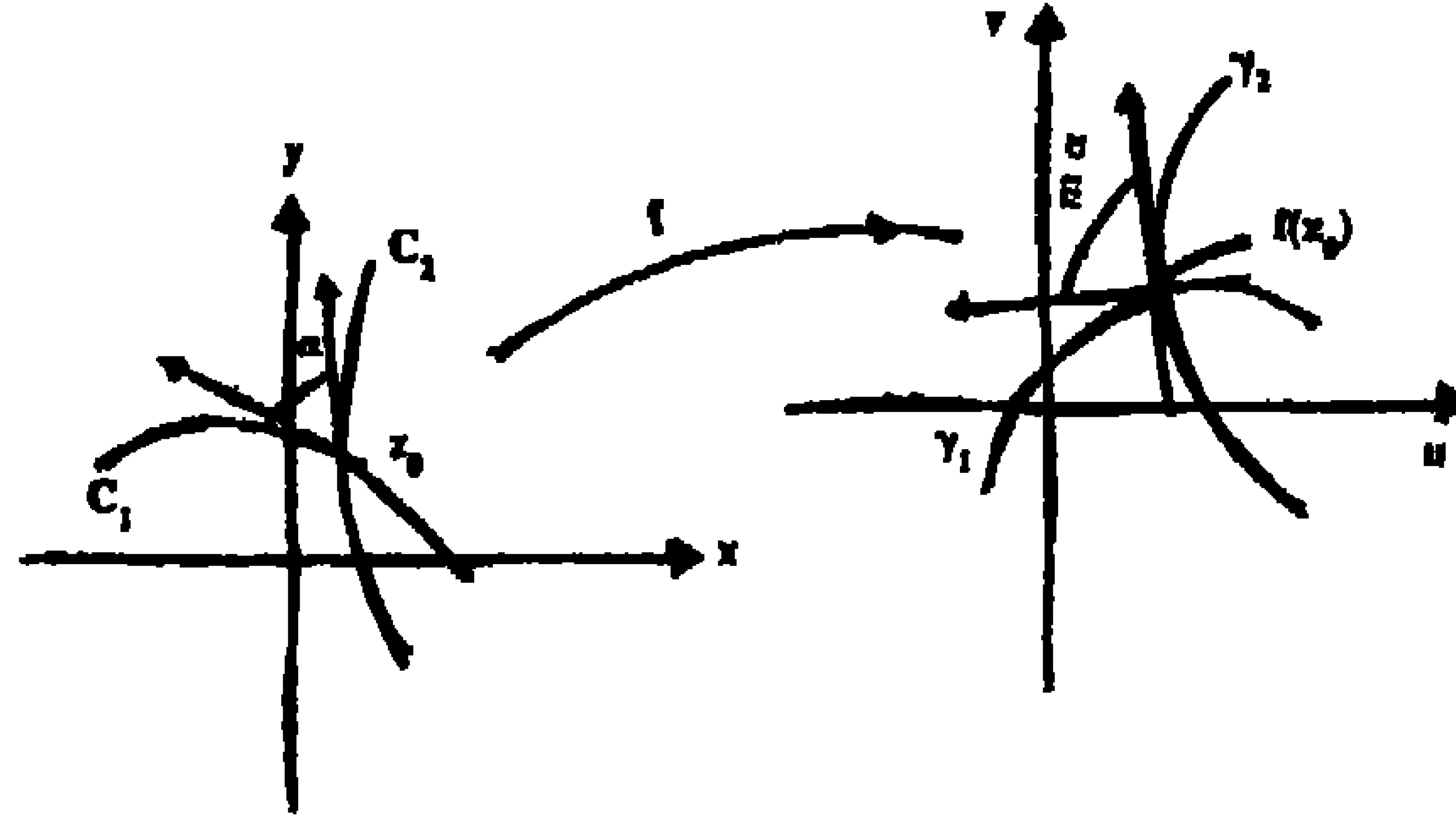
أي أن الزاوية بين المسارين γ_2,γ_1 هي $\delta_2 - \delta_1$ وهــي m أضعـاف الزاويـة بـين المسارين C_2,C_1 وهي $\beta_2 - \beta_1$ وبهذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية:

نفرض أن الاقتران f تحليلي عند z_0 بحيث أن:

$$f^{k}(z_0) = 0,\ k = 1,2,\ldots,m-1,\ f^{m}(z_0) \neq 0$$

فإن الاقتران f يكبر بين أي مسارين متقاطعين في النقطة z_0 بمقدار m مرة.



شكل (4)

النظرية التالية تبين أن الاقتران التحليلي الذي يتكون مشتقته ليســت صفـرا على مجال ما يكون واحدا لواحد على ذلك المجال.

نظرية 12-VII:

أ- نفرض أن الاقتران f تحليلي على مجال D فإذا كانت $f'(z) \neq 0$ لكل z في D فإن f واحد لواحد على D.

ب- وكذلك إذا كان الاقتران f تحليليا على المجال D وكان واحدا لواحد على المجال D فإن $f'(z) \neq 0$ لكل z في D.

البرهان:

أ- نفرض أن z_0 نقطة اختيارية في D وأنه لا يوجد جوار (مفتوح) مركزه z_0 يكون عليه الاقتران f واحدا - لواحد. لذلك يمكن أن نستنتج أن في كل قرص مفتوح مركزه z_0 يوجد على الأقل نقطتان مختلفتان w,z بحيث إن $f(z) = f(w)$ ومن هذه الحقيقة نستنتج وجود متتاليتين (w_n)، (z_n) من نقاط D بحيث $\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ وأن $f(w_n) \neq f(z_n)$ لكل $n = 1,2,\ldots$. فإذا أن C كانتور مغلق وبسيط موجب الاتجاه في داخل D فإن f تحليلي على C وفي المنطقة الداخلية له كذلك.

وبتطبيق نظرية كوشي لتكامل فإن:

$$\frac{f(w_n)-f(z_n)}{w_n - z_n} = \frac{1}{w_n - z_n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_c \frac{f(s)}{s-w_n}ds - \int_c \frac{f(s)}{s-z_n}\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi i(w_n - z_n)}\int_c \frac{f(s)(w_n - z_n)}{(s-w_n)(s-z_n)}ds$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} = z_0$ فإن:

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ w\to w_0}} \int_c \frac{f(s)}{(s-w_n)(s-z_n)}ds = \int_c \frac{f(s)}{(s-z_0)}ds$$

وعليه فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(w_n)-f(z_n)}{w_n - z_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)}{(s-z_0)}ds$$

وباستخدام نظرية كوشي للمشتقة فإن الطرف الأيمن يمثل $f'(z_0)$. أما الطرف الأيسر فإنه يساوي صفرا وبالتالي فإن $f'(z_0)=0$ وهذا يناقض الفرض مبينا أن الاقتران يجب أن يكون واحدا - لواحد.

ب- نترك إثبات هذا الفرع تمرينا للقارئ منهيا بذلك إثبات النظرية.

النظرية التالي هي نتيجة للنظرية السابقة ونترك إثباتها تمرينا للقارئ.

نظرية:

إذا كان الاقتران f تحليليا على المجال D وكان كذلك واحدا - لواحد على D فإنه يكون مطابقا على ذلك المجال.

الأمثلة التالية توضح الاقتران المطابق.

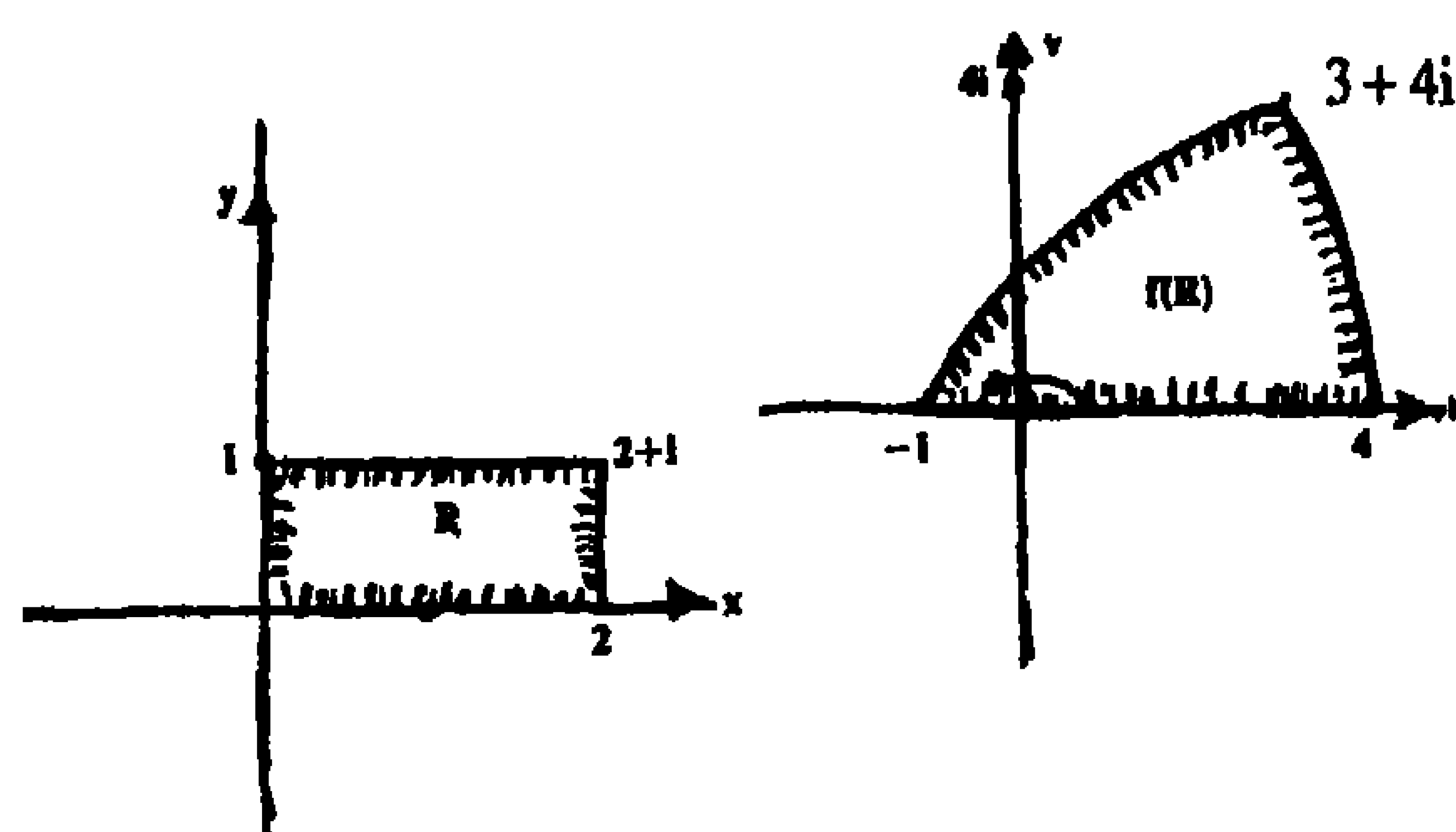
مثال:

بما أن الاقتران $f(z)=e^z$ اقتران تحليل على كل المستوى المركب وكذلك $f'(z)=e^z ? 0$ لكل z في المستوى فإن الاقتران f يكون مطابقا على كل المستوى.

مثال 15-VII:

الاقتران $f(z)=z^2$ تحليلي على كل المستوى المركب ولكن $f(0)=0$ عند النقطة $z_0 = 0$ وبالتالي فإن الاقتران f ليس مطابقا عند النقطة $z_0= 0$ بمقدار $m = 2$ وبالتالي لإيجاد صورة المستطيل R، حيث:

$$R = \{x+yi: 0 ? x ? 2,0 ?y ? 1\}$$



شكل (5)

فإن صورة الزاوية القائمة عند $z0 = 0$ تضاعف لتصبح الزاوية المستقيمة π في المستوى u,v وبالحساب يمكن معرفة أن صورة النقاط 2,2+i,i هي على الترتيب 4,3+4i, -1 ولإيجاد صور القطع المستقيمة نجد العلاقات التالية:

$$u + vi = (w = f(z) = z^2) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

وبالتالي فإن:

$$u = x^2 - y^2 , v = 2xy$$

وحيث إن $y \geq 0, x \geq 0$ في المستطيل R فإن $v = 2xy > 0$ أي أن $\text{Im } w > 0$ وبحذف المتغيرات y,x بين العلاقتين $v = 2xy, u = x^2-y^2$ عندما تأخذ هذه المتغيرات القيم على أضلاع المستطيل نجد أن صورة ضلع المستطيل $y=1, 0 < x < 2$ هي $\frac{1}{4}v^2 - u = 1$ وكذلك صورة ضلع المستطيل $x = 2, 0 < y < 1$ هي $u + \frac{1}{16}v^2 = 4$ وعليه فإن صورة المستطيل تأخذ الشكل (5).

لاحظ أن مقياس التكبير هو:

$$|f'(z_0)|$$

فيكون عند $z = 2+i$ هو:

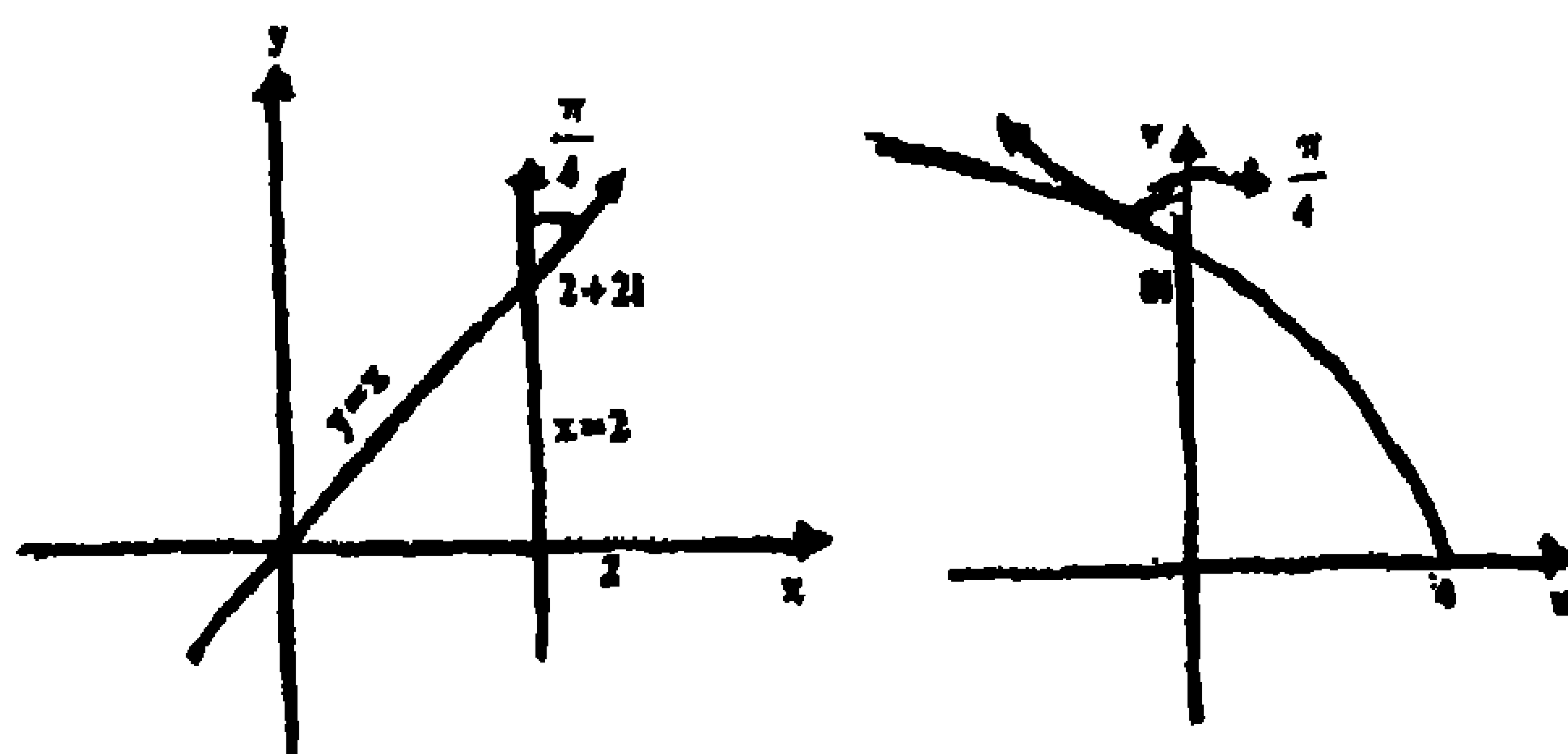
$$|f'(z)| = 2|2+i| = 2\sqrt{5}$$

مثال:

لاحظ أن الاقتران $f(z)=z^2$ في المثال السابق اقتران مطابق عند كل $z \neq 0$.

وذلك لأن $f'(z) = 2z \neq 0$ فإذا أخذنا المسارين $y = x$ و $x=2$ المتقاطعين عند النقطة $z_0= 2+2i$ فسنتبين أن الاقتران يحافظ على الزاوية بين صورتي هذين المسارين وهي $\theta = \pi/4$ ولنرى ذلك نستعين بالعلاقتين $v = 2xy,\ u = x^2-y^2$.
ولإيجاد صورة المسار الأول المعرف بالمعادلة $y = x$ فإن $u = 0$ وكذلك $v = 2y^2>0$ يحددان صورة هذا المسار وبالتالي فإن صورة المسار $y = x$ هو النصف الموجب من المحور التخيلي v ولإيجاد صورة المسار الثاني المعرف بالمعادلة $x = 2$ فإن $v = 4y,\ u=4-y^2$ وبحذف y من كلا المعادلتين نجد صورة المسار $x = 2$ وهي:

وهذه تمثل قطعا مكافئا $u = 4-v^2/16$



شكل (6)

لاحظ كذلك أن الزاوية هي $\text{Arg}\ (f'(2+2i))$ وهي: $\text{Arg}\ (4+4i) = \pi/4$

أي أن الزاوية هي $\pi/4$ تماما كما كانت بين المسارين: $x = 2, y = x$

وبنفس الاتجاه كذلك (لاحظ الشكل (6)).

مثال 17-VII:

لاحظ أن الاقتران $f(z) = \cos z$ اقتران مطابق عند جميع z.

بحيث إن $z \neq n\pi,\ n= 0,\ \mp1,\mp2,....$ (وهي التي تجعل $f'(z)=-\sin z$ صفرا)

أما عند هذه النقاط فإن الاقتران ليس مطابقا.

ننهي هذا البند بملاحظة أن الاقتران المطـابق عنـد نقطـة z_0 يوجـد لهـا نظـير موضعي أي اقتران عكسي موضعي بالرمزg وللاقتران بـالرمز f فـإن العلاقـة بـين مشتقتي الاقترانين (وهي معروفة) هي:

$$g'(w)=\frac{1}{f'(z)}$$

لكل z في الجوار (مفتوح) الذي مركـزه z_0. ولربـط هـذه الفكـرة بالتفـاضل المتقدم نستفيد من معادلتي كوشي-ريمان وكون الاقتران f تحليليا حيث إن الجاكوبي لهذا الاقتران هو:

$$J(f)=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=u_x^2+v_x^2=|f'(z_0)|^2$$

فإذا كان هذا الاقتران مطابقا فإن $f'(z_0)\neq 0$ وبالتالي فـإن الجـاكوبي $J(f)\neq 0$ مؤكدا أن الاقتران f له اقتران عكسي في جوار (مفتوح) حول z_0.

تمارين

1- بين أن الاقترانات التالية مطابقة على مجال ما ثم جد هذا المجال:

أ- $f(z) = \sin z$ ب- $f(z) = e^{z^2}$

جـ- $f(z)= z^2 + z$ د - $f(z) = \cos 2z$

هـ- $f(z) = iz^2$

2- جد صورة المربع R تحت الاقترانين $f(z)= z^2$ ، $g(z)= iz$ حيث أن:

$R = \{x + yi: 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

3- صف صورة المجالات التالية تحت الاقتران المطابق $f(z)= e^z$.

أ- $D = \{z : 0 < Im.z < \pi/2\}$

ب- المنطقة المثلثية المحدودة بالمسارات: $y , 0, y = x, x = 2$

جـ- $D = \{z : Re\, z > 0\}$

د - $D = \{z : Re > 0, 0 < Im\, z < \pi/2\}$

4- جد اقترانا عكسيا موضعيا للاقتران $f(z)= z^2$ عند النقاط التالية:

أ - $z_0 = 1$ ب- $z_0 = i$

5- بين أن الاقتران $f(z)=\frac{1}{z}$ مطابق عند جميع النقاط عدا $z = 0$.

6- برهن النظرية 13-VII.

7- بين أن الاقتران $f(z) - z^2$ واحد - لواحد على المجال $D=\{z\in C : Re.\ z > 0\}$ ولكنه ليس واحد - لواحد على أي مجال يحتوي D.

8- بفرض أن الاقتران f تحليلي وكذلك واحد - لواحد على مجال D وعرفنا الاقتران h بالمساواة $h^2(z) = f(z)$ لكل z في D برهن أن h واحد - لواحد على D.

9- ليكن الاقتران f تحليليا على المجال D حيث: $D=\{z : |z| < 1$

ونفرض أن $f(0) = 0$ وأن $|f(z)| < 1$ لكل z في D.

أ- برهن أن $|f(z)| < |z| < 1$ لكل z في D.

ب- إذا كانت $z_0 \neq 0$ بحيث إن $f(z_0) = z_0$ فبرهن أنه يوجد عدد مركب α بحيث أن: $f(z) = \alpha z; |\alpha| = 1$

اقتراح:

أ- من كن الاقتران تحليليا وأن $f(0) = 0$ بين أن $f(z)/z$ تحليلي كذلك ثم بين أن:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max_{z \in C_r} \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r}, C_r : |z| = r < 1$$

ثم خذ النهاية عندما $r \to 1$ لنستنتج المطلوب.

ب- استعن بقانون القيمة المطلقة العظمى لإثبات أن:

$$\frac{f(z)}{z} = \alpha, |\alpha| = 1$$

α مقدار ثابت.

ملاحظة: الفرع أ من هذا التمرين يعرف بأنه نظرية شوارتز.

الاقتران مزدوج الخطية:

نتناول في هذا البند نوعا هاما مــن الاقترانـات يمثـل عائلـة مـن الاقترانـات المطابقة ولها تطبيقات كثيرة ويسمى الاقتران مزدوج الخطية:

تعريف (الاقتران مزدوج الخطية):

لأي أربعة أعداد مركبة $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ عرف الاقتران f بالمساواة التالية:

$$f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \alpha\delta\neq\beta\gamma$$

هذا الاقتران اقتران نسبي وبالتالي له قطب بسيط عنــد النقطـة $z_0=-\delta/\gamma$ أمـا الشرط $\alpha\delta\neq\beta\gamma$ فهو ضروري حتى لا يكون الاقتران ثابت القيمة. ولهذا الاقـتران خصائص هامة كثيرة نلخصها فيما يلي:

أ - الاقتران f مطابق عند جميع الأعداد المركبة عدا القطب $z_0=-\delta/\gamma$ طبعا لأن:

$$f'(z)=\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{(\gamma z+\delta)^2}\neq 0$$

لأن $\alpha\delta\neq\beta\gamma$

ب- بالاستفادة من نظرية 12-VII فإن الاقتران f واحد - لواحد كذلك على جميع نقاط المستوى عدا القطب $-\delta/\gamma$ أي على المجال $D = C- \{-\delta/\gamma\}$.

جـ- يمكن إعادة تعريف هذا الاقتران ليصبح واحدا - لواحد على كـرة ريمـان أي على المجال $D = C\cup\{\infty$ وذلك كما يلي:

$$g(z)=\begin{cases}\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ z\neq-\delta/\gamma\\ \infty, z\neq-\delta/\gamma\\ \delta/\gamma,\ z=\infty\end{cases}$$

د- لكون هذا الاقتران واحد - لواحد على المجال $D=C-\{-\delta/\gamma\}$ فيوجد له اقتران عكسي هو:

$$z=h(w)=\frac{-\delta w+\beta}{\gamma w-\alpha} \qquad \text{..........(4)}$$

حيث إن:

$$w=f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

ويمكن كتابة كل منهما بدلالة المتغيرين z,w كما يلي:

$$\alpha z+\beta=w\gamma z+\delta w$$

ومن هذه العلاقة يتبين لنا سبب التسمية باسم مزدوج الخطية فـهذه العلاقـة تبين أن الاقتران خطي بالمتغيرz وهو كذلك خطي بالمتغير w.

هـ- ولكون هذا الاقتران يمكن تعريفه ليصبح واحد - لواحد على المجال $D=C\cup\{\infty\}$ فإنه يوجد له اقتران عكسي وهو:

$$g^{-1}(z)=\begin{cases}\dfrac{-\delta z+\beta}{\gamma z-\alpha} & , z\neq\dfrac{\alpha}{\gamma}\\ \infty & , z=\alpha/\gamma\\ -\delta/\gamma & , z=\infty\end{cases}$$

و- يمكن اعتبار هذا الاقتران مزدوج الخطية على أنه تركيـب لعـدة اقترانـات مثـل الإزاحة والدوران والتكبير والمقلوب. أنظر تمرين 24.

ز- من أهم خصائص هذا الاقتران أنه ينقل مجموعة الدوائر والخطوط المستقيمة إلى نفسها أي أن صورة الدائرة إما أن تكون دائرة أو خطا مستقيما وكذلك صورة الخط المستقيم إما أن تكون دائرة أو خطا مستقيما.

حـ- يمكن إيجاد اقتران مزدوج الخطية ينقل أي ثلاث نقـاط مختلفـة في المسـتوى إلى ثلاث نقاط متميزة أخرى. فإذا أردنا أن نجـد الاقـتران المـزدوج الخطيـة الـذي ينقل النقاط z_1,z_2,z_3 إلى w_1,w_2,w_3 على الترتيب فإننا نجد w كاقتران في z مـن النسبة التالية:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad ....(5)$$

هذه علاقة جبرية تبين أن صـورة z_1 هـي w_1 وصـورة z_2 هـي w_2 وكذلـك صورة z_3 هي w_3. وكذلك هو مزدوج الخطية إذا حصلنا على الضرب التبادلي لهذه العلاقة. وإذا كانت إحدى النقاط المطلوبة هي الرمز ∞ فإننا نفرض أن النسبة الـتي تحتوي على هذه النقطة هي 1. وبدقة أكثر نفـرض أن إحـدى النقـاط $w_1=\infty$ فإننـا نفرض أن $\frac{w-w_1}{w_2-w_1}=1$ لماذا؟ وهي التي تحتوي علـى w1 لنحصـل علـى العلاقـة المطلوبة وهي:

$$\frac{w_2-w_3}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad ....(6)$$

سنبين ونوضح الحقائق في ز، ح بالأمثلة التالية:

مثال 20-VII :

جد اقتراناً مزدوج الخطية ينقل النقاط -1, 2, i إلى النقاط i, -3, 1 .

الحل:

بتطبيق العلاقة (5) حيث إن:

$z_1=-1,\ z_2=2, z_3=i, w_1=i,\ w_2=-3=1$

لنحصل على :

$$\frac{(w-i)(-3-i)}{(w-1)(-3-i)}=\frac{(z+1)(2-i)}{(z-i)(2+1)}$$

ومنها فإن:

$$\frac{4(w-i)}{(w-1)(3+i)}=\frac{(z+1)(2-i)}{3(z-i)}$$

وبإجراء العمليات الجبرية اللازمة لإيجاد w بدلالة z نحصل على الاقتران المطلوب وهو:

$$w=f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

حيث إن:

$\alpha= -7 + 13i,\ \beta = 5+ i = \gamma, \delta = -7-11i$

مثال:

جد اقترانا مزدوج الخطية ينقل النقاط 2,1+i,0 إلى النقاط $0, 1, \infty$.

الحل:

بتطبيق فكرة العلاقة (6) حيث إن:

$z_1=2, z_2 = 1+ i, z_3 = 0, w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$

أي بفرض أن: $\frac{w_2-w_3}{w-w_3}=1$ لنحصل على العلاقة:

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

ومنها فإن:

$$w=\frac{(z-2)(1+i)}{z(1+i-2)}$$

أي أن:

$$w=\left(\frac{1+i}{-1+i}\right)\left(\frac{z-2}{z}\right)$$

ويمكن تبسيط هذا الاقتران ليصبح كما يلي:

$$w=\frac{-iz+2i}{z}$$

مثال VII-22:

بين أن الاقتران:

$$f(z)=\frac{1+z}{i(1-z)}$$

ينقل قرص الوحدة $|z|<1$ إلى نصف المستوى السفلي.

الحل:

لنكتب الاقتران على الصورة التالية:

$$w=f(z)=\frac{iz+i}{z-1}$$

لنحصل على قيم الثوابت $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ هي:

$$\alpha=i=\beta, \gamma=1, \delta=-1$$

وبالتالي فإنه يوجد اقتران عكسي لهذا الاقتران وهو:

$$z=g(w)=\frac{w+i}{w-i}$$

وذلك بتطبيق العلاقة (4). وحتى نبحث تأثير هـذا الاقـتران علـى القـرص المفتوح نبحث عن صورة دائرة الوحدة $|z|=1$ وبـالتعويض في الاقـتران العكسـي لنحصل على:

$$1=|z|=\left|\frac{w+i}{w-i}\right|$$

أي أن:

$$|w+i|=|w-i|$$

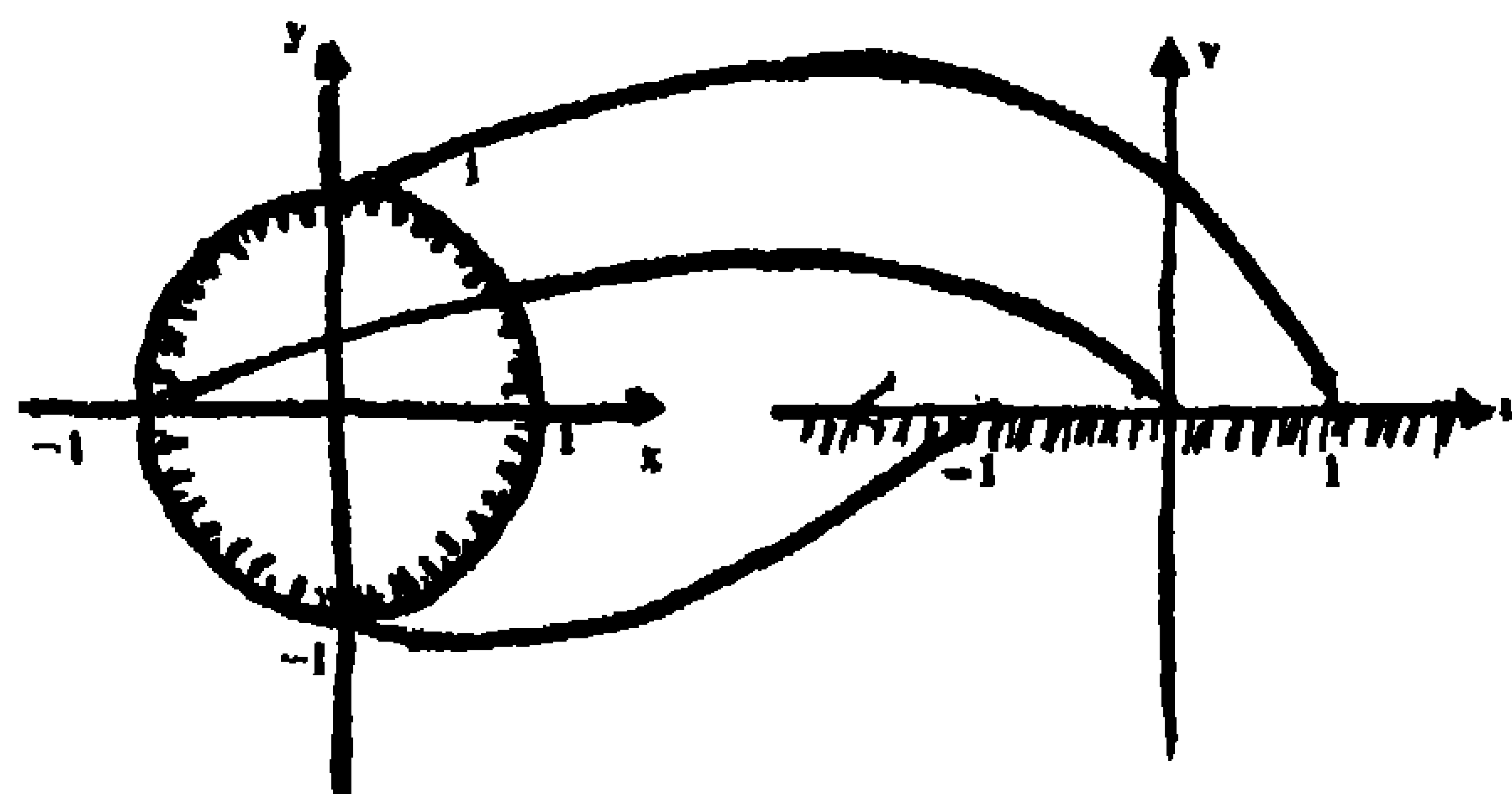
وبالتعويض بدلا من w بالقيمة $u+vi$ نحصل على:

$$|u+(v+1)i|=|u+(v-1)i|$$

ومنه فإن:

$$u^2 + (v+1)^2 = u^2 + (v-1)^2$$

وهذا ينتج المعادلة $v=0$ وهذا يعني أن صورة دائرة الوحدة هي المحور الحقيقي $(v = 0)$ u حيث أن $f(-1) = 0$ وكذلك $f(i) = 1$.



شكل (7)

وينصح هنا بتوضيح الاتجاه الموجب للكانتور $|z|=1$ لنحدد اتجاه صورته وهي المحور الحقيقي بالاتجاه السالب (وذلك بأخذ صورة عدة نقاط على الدائرة لتوضيح الاتجاه) فتكون صورة المنطقة الداخلية للكانتور $|z|=1$ هي المنطقة التي تقع على يسار صورة هذا الكانتور أي النصف السفلي للمستوى المركب وللتحقق من ذلك نفرض أن $|z|<1$ في الاقتران العكسي لنحصل على أن $|w+i|<|w-i|$ وبكتابة هذه العلاقة على الصورة $|w-(-i)| < |w-i|$ والتي تفسر على أن المسافة بين w و i- أصغر من المسافة بين w و i وهذا الشرط ينطبق على النصف السفلي للمستوى.

مثال:

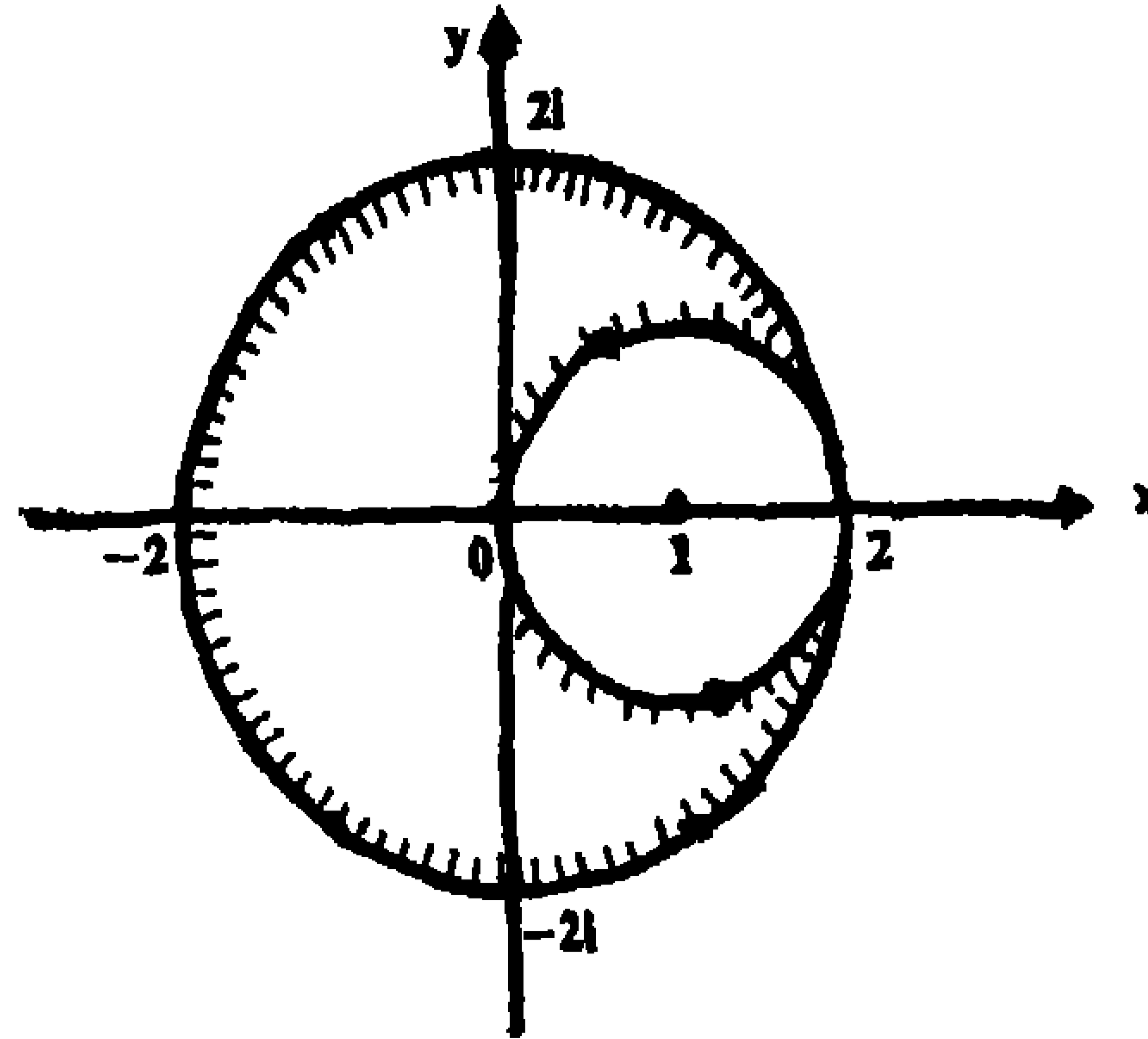
ابحث في تأثير الاقتران $f(z)=\frac{1}{z}$ على المستوى المركب. (أي بين أنه ينقل الدائرة إلى دائرة أو خط مستقيم وكذلك الخط المستقيم ينقله إلى دائرة أو خط مستقيم).

الحل:

من الواضح أن هذا الاقتران ينقل كرة ريمان إلى نفسها بشكل واحد - لواحد حيث إن $f(0)=\infty$ و $f(\infty)=0$ وأن $f(z)=\frac{1}{z}$ لباقي الأعداد المركبة. وهي كذلك حالة خاصة من الاقتران مزدوج الخطية لذلك فهو اقتران مطابق عند كل الأعداد المركبة باستثناء $z=0$. ومن تأثيره على المستوى أنه ينقل دائرة الوحدة إلى نفسها بحيث إن $f(z)=\bar{z}$ لكل $z: |z|=1$ وكذلك ينقل كل نقطة في داخل قرص الوحدة إلى نقطة خارج هذا القرص وذلك إذا فرضنا أن $|z|<1$ فإن $w=\frac{1}{z}$ ومنه فإن $|z|=\frac{1}{|w|}$ وبالتالي فإن $\frac{1}{|w|}<1$ أي أن $|w|>1$. أما الاقتران العكسي لهذا الاقتران فهو نفسه.

مثال 24-VII :

جد اقترانا مزدوج الخطية ينقل المنطقة الهلالية في الشكل (8) إلى شريحة لا نهائية.



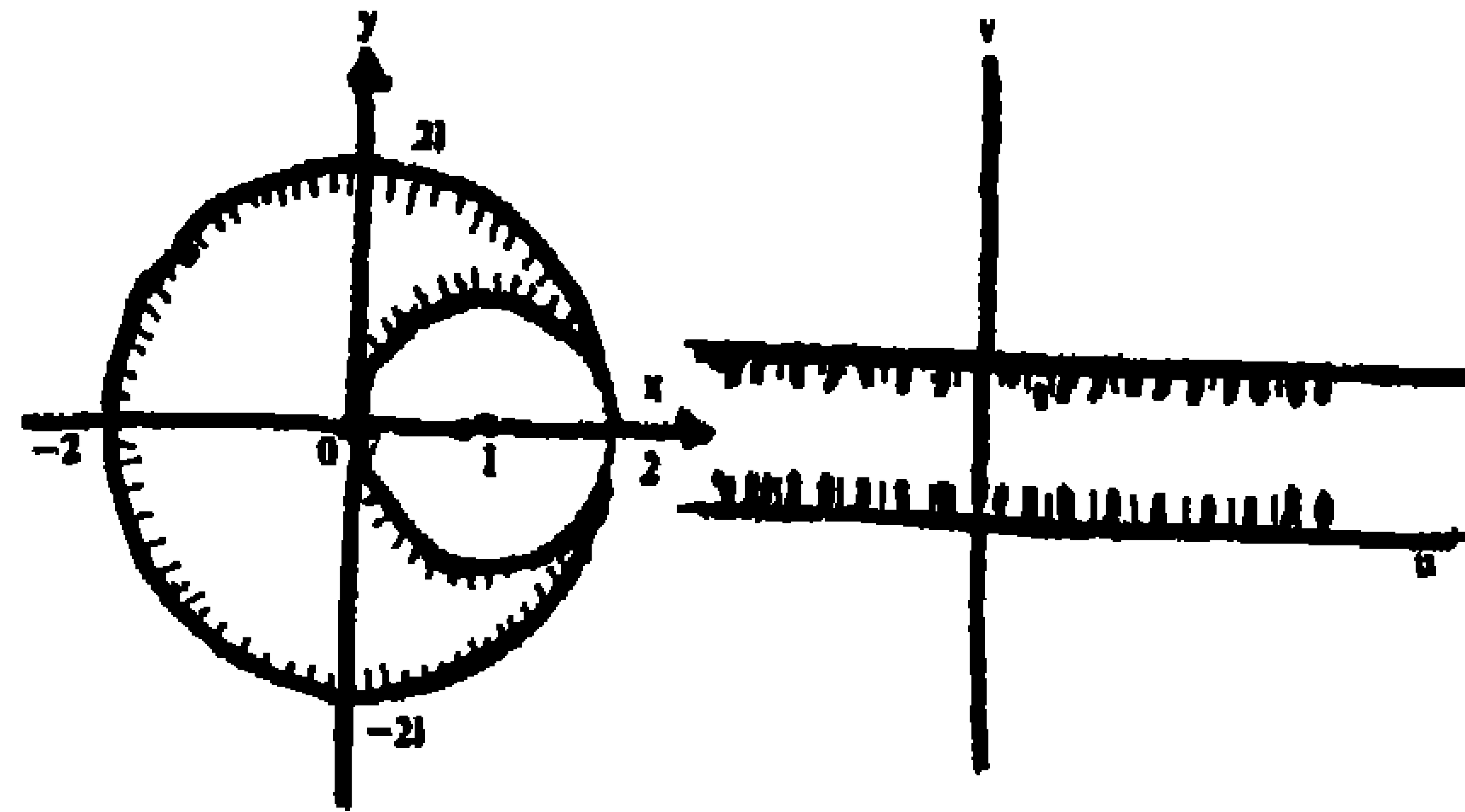
شكل (8)

الحل:

المنطقة المطلوبة إيجاد صورتها هي داخل الدائرة $|z|=2$ وخارج الدائرة $|z-1| = 1$.
أولاً لنحاول أن نجد اقتران مزدوج الخطية ينقل الدائرة $|z|=2$ إلى المحور الحقيقي u مثلاً والقرص إلى النصف العلوي من المستوى المركب وذلك باختيار ثلاث نقاط على الدائرة مرتبة حسب الاتجاه الموجب لها وثلاث نقاط على المحور الحقيقي بالاتجاه الموجب مثلاً: $z_1=-2,z_2=-2i,z_3=2$ وكذلك $w_1=0,w_2=1,w_3=\infty$ وبتطبيق فكرة العلاقة (6) وإجراء العمليات الجبرية اللازمة للتبسيط أن الاقتران المطلوب هو:

$$w=\frac{-i(z+2)}{(z-2)}$$

وحسب التعريف فإن هذا الاقتران ينقل الدائرة $|z|=2$ إلى المحور الحقيقي (المغلق) u (أي أن $v=0$). وحسب الاتجاه يتبين أن صورة القرص المفتوح $|z|<2$ هي نصف المستوى المركب u ,v. وللتأكد من ذلك علينا أن نبين أنه إذا كانت $|z|<2$ فإن $\text{Im } w>0$ وبإيجاد الاقتران العكسي لهذا الاقتران (وذلك باستخدام العلاقة (4)) نحصل على:



شكل (9)

$$z=\frac{2w-2i}{w+i}$$

حيث إن:

$$\alpha = -i,\beta = -2i,\gamma = 1,\delta=-2$$

وحيث إن $|z|<2$ فإن:

$$|z|=\left|\frac{2w-2i}{w+i}\right|<2$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن:

$$|w-i|<|w-(-i)|$$

وهذه العلاقة تفسير على أن بعد w عن النقطة i أصغر من بعد النقطية w عن i- وهذا لا يكون إلا في النصف العلوي من المستوى المركب u,v حيث Imw>0 . الخطوة التالية هي أن نجد صورة الدائرة $|z-1|=1$ تحت الاقتران (7−31) وذلك باختيار ثلاث نقاط مختلفة مثل 1+i, 0, 1-i وبالتعويض في الاقتران (7−13) نجد أن صورها هي على الترتيب.

$$w_1=f(1+i)=-2+i$$

$$w_2=f(0)=i,\ w_3=f(1-i)=2+i$$

نلاحظ أن هذه الصور -2+i, i, 2+i تقع جميعها على الخط المستقيم v=1 وبذلك فإن صورة المنطقة الهلالية هي الشريحةR حيث:

$$R=\{w: 0<\operatorname{Im} w<1\}$$

المثال التالي يناقش اقترانا من أهم الاقترانات المطابقة المزدوجة الخطية لأنها تنقل قرص الوحدة المفتوح إلى نفسه.

مثال:

بين أن الاقتران مزدوج الخطية المعرف بالمساواة التالية:

$$f(z)=\bar{\lambda}\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z},|\lambda|=1,|\alpha|<1$$

ينقل قرص الوحدة المفتوح $|z|<1$ إلى نفسه.

الحل:

بما أن $\bar{\lambda}\alpha\bar{\alpha}\neq-\bar{\lambda}.1$ فإن الاقتران.

$$f(z)=\frac{\bar{\lambda}\alpha\,\bar{\lambda}z}{1-\bar{\alpha}z}$$

واحد- لواحد والاقتران العكسي له هو:

$$g(w)=\frac{-w-\alpha\bar{\lambda}}{\bar{\alpha}w+\bar{\lambda}}=\frac{-\lambda w+\alpha}{-\bar{\alpha}\lambda w+1}$$

ومن ذلك فإن:

$$g(w)=\lambda=\frac{\alpha\bar{\lambda}-w}{1-\bar{\alpha}\lambda w}$$

ومن السهل التحقق من أن $gof\ (z)\ =z$ وأن $fog\ (w)\ =\ w$ ونـترك ذلـك للقارئ.

بقي أن نثبت أنه إذا كان $|z|<1$ فإن $|f(z)|<1$ وكذلـك إذا كـان $|w|<1$ فـإن $|g(w)|<1$ ويكفي أن نثبت الأول ونترك الثاني تمريناً للقـارئ ولذلـك نفـرض أن $|z|<1$ فإن:

$$|f(z)|^2=\frac{|\alpha|^2-2\text{Re.}(\bar{\alpha}z)+|z|^2}{1-2\text{Re.}(\bar{\alpha}z)+|\alpha|^2|z|^2}$$

وكذلك فإن $|f(z)<1|$ عندما يتحقق الشرط.

$$|\alpha|^2-2\text{Re.}(\bar{\alpha}z)+|z|^2<1-\text{Re.}(\bar{\alpha}z)+|\alpha|^2|z|^2$$

ومن ذلك فإن:

$$|\alpha|^2-|z|^2<1+|\alpha|^2|z|^2$$

وهذه المتباينة يمكن أن تكتب بالصيغة التالية:

$$1+|\alpha|^2|z|^2-|\alpha|^2-|z|^2>0$$

ومن ذلك فإن:

$$(1-|z|^2)(1-|\alpha|^2)>0$$

وبما أن $|z|<1, |\alpha|<1$ فإن:

$$\left(1-|z|^2\right)>0,\ \left(1-|\alpha|^2\right)>0$$

وهذا ينهي إثبات أن $|f(z)|<1$.

أي أن هذا الاقتران ينقل القرص المفتوح $|z|<1$ إلى القرص المفتوح $|w|<1$.

وبما أن $|\lambda|=1$ فإنها تأخذ الشكل $\lambda=e^{\theta i}$ حيث إن $\theta=\arg\lambda$ وبالتالي فإن الاقتران في مثال 25-VII يأخذ الشكل التالي:

$$f(z)=e^{-\theta i}\,\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$$

لاحظ كذلك أن $f(\alpha)=0, f(0)=\alpha\bar{\lambda}$ و $g(0)=\alpha$.

المثال التالي يبين كيف يمكن الاستفادة من تركيب الاقترانات للحصول على صورة محددة.

مثال:

بين أنه يمكن أن تنقل المنطقة الهلالية المعرفة في المثال 24-VII إلى كل المستوى المركب ينقل المنطقة الهلالية إلى الشريحة:

$$R=\{w : 0<\operatorname{Im} w<1\}$$

والآن ننتقل إلى الخطة الثانية وهي إيجاد اقتران ينقل الشريحة R إلى كل المستوى المركب وهنا يفكر باقتران دوري مثل e^z ولكن هذا الاقتران ينقل الشريحة $\{z : 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ إلى كل المستوى المركب وبتعديل الاقتران $g(z)=e^z$ فإنه أي الاقتران g ينقل الشريحة R إلى المستوى المركب وبإيجاد تركيب الاقترانين g.f نحصل على الاقتران المطلوب وهو:

$$h(z)=g\circ f(z)=e^{\frac{\pi i(2+2)}{z-2}}$$

مثال:

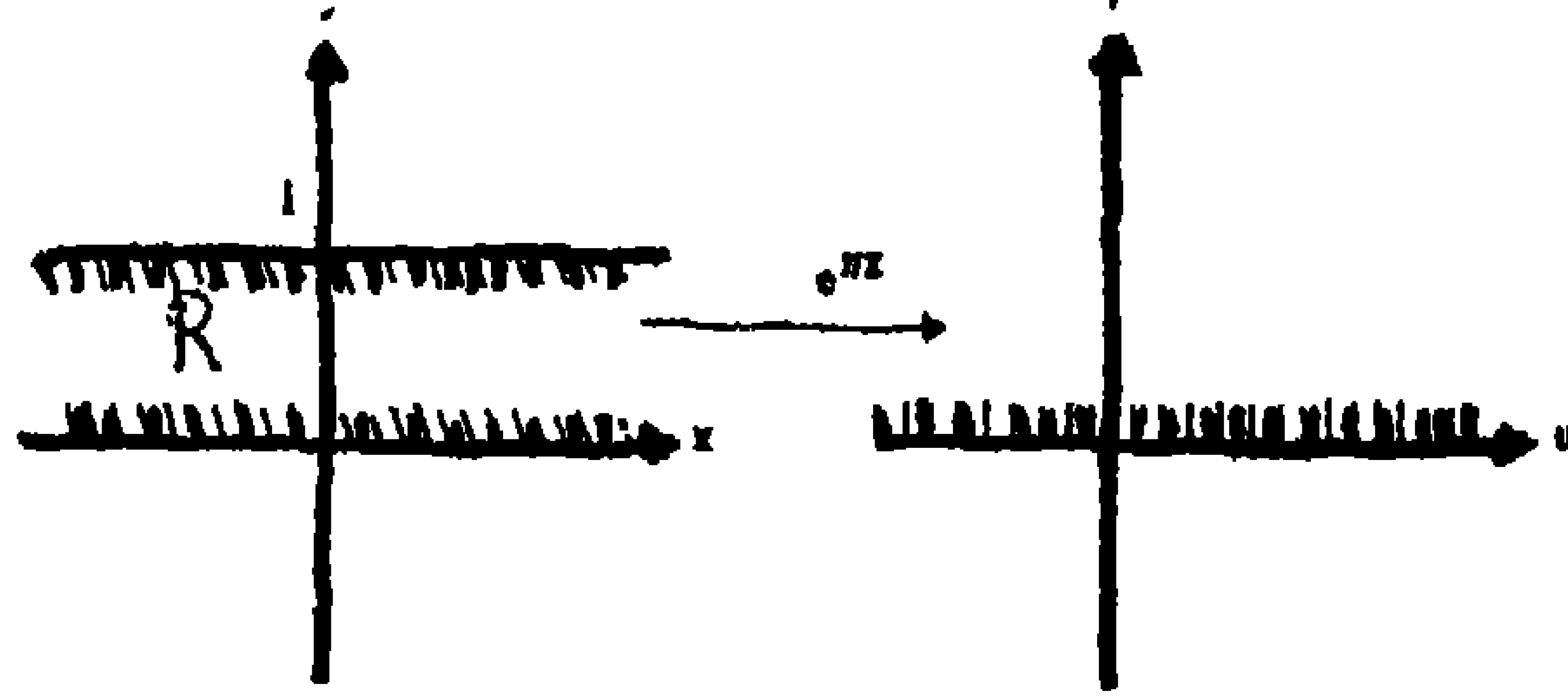
بين أنه يمكن أن نجد اقتراناً ينقل الشريحة مثل:

$$R=\{z : 0<\operatorname{Im} z<1$$

إلى قرص مثل $|z+1| < 1$

الحل:

تبين لنا أن الاقتران $f(z) = e^{\pi z}$ ينقل الشريحة R إلى نصف المستوى المركب العلوي.



شكل (10)

يمكن بالأساليب التي اتبعت في الأمثلة السابقة: إيجاد اقتران مزدوج الخطية ينقل نصف المستوى المركب العلوي إلى القرص $|z+1| < 1$ مثل:

$$g(z)=\frac{-1z+2}{(1+i)z-(1-i)}$$

وبالتالي فإن تركيب الاقترانين يحقق المطلوب وهو:

$$h(z)=g(f(z))=\frac{-2e^{\pi z}+2}{(1+i)e^{\pi z}-(1-i)}$$

والذي ينقل الشريحة R إلى القرص $|z+1| <1$

مثال:

بين أن الاقتران:

$$h(z)=\frac{2}{\pi}\text{Log}\frac{i+z}{i-z}$$

ينقل قرص الوحدة $|z| <1$ إلى الشريحة R حيث:

$R = \{w : -1 < \text{Im } w <1\}$

الحل:

من الواضح الاقتران h عبارة عن تركيب اقترانين وهما:

$$h(z)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Log} z, f(z)=\frac{i+z}{i-z}$$

ونترك للقارئ أن يبين أن الاقتران f ينقل قرص الوحدة إلى النصف الأيمن من المستوى المركب أما الاقتران g فإنه ينقل نصف المستوى هذا للشريحة المذكورة R ونترك تفصيل ذلك للقارئ.

وهكذا يتبين لنا كيف يمكن إيجاد اقترانات تنقل أي مجال إلى مجال آخر باستخدام تركيب اقتران مزدوج الخطية والاقترانات الأساسية مثل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية والمثلثية وغيرها.

تمارين

1- أكمل حل مثال 23-VII بأن تبين أن الاقتران $f(z)=\frac{1}{z}$ ينقل المعادلة $\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0$ إلى المعادلة $\delta(u^2+v^2)+\beta u-\gamma v+\alpha=0$ حيث إن $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ أعداد حقيقية بحيث إن $\beta^2-\gamma^2 < 4\alpha\delta$. لاحظ أن المعادلة الأولى تمثل دائرة إذا كانت $\alpha\neq0$ ومستقيماً إذا كانت $\alpha=0$. وعليه فإن المعادلة الثانية كذلك تمثل دائرة إذا كانت $\delta\neq0$ وتمثل خطاً مستقيماً إذا كانت $\delta=0$.

2- استفد من التمرين السابق $f(z)=\frac{1}{z}$ ينقل الخطوط المستقيمة الأفقية إلى دوائر مراكزها تقع على المحور التخيلي وكذلك الخطوط المستقيمة الرأسية إلى دوائر مراكزها تقع على المحور الحقيقي.

اقتراح: الخط المستقيم الأفقي يوازي المحور الحقيقي x وتكون معادلته $y+\delta=0$ حيث تكون α,β أصفاراً و $\gamma=1$ وبالمثل يمكن معالجة الخط المستقيم الرأسي.

3- جد صورة ما يلي تحت الاقتران $f(z)=\frac{1}{z}$.

أ - $|z+1|=1$ ب- $|z-i|=1$

جـ- $\text{Im}z=2$ د - $\text{Re}z=-1$

4- بين أن الاقتران: $f(z)=\frac{(i-i-)z+2}{(1+i)z+2}$.

ينقل القرص $|z+1|<1$ إلى نصف المستوى العلوي $\text{Im}\,.\,w>0$.

5- جد صورة الدائرة $|z-1|=1$ والمنطقة الداخلية لها تحت الاقترانات التالية:

أ - $f(z)=z-i$ ب- $f(z)=-iz$

جـ- $f(z)=\frac{3z-4}{z-1}$ د - $f(z)=\frac{z-2}{z+1}$

6- جد اقتراناً مزدوج الخطية ينقل النقاط z1,z2,z3 إلى w1,w2,w3 على الترتيب فيما يلي:

أ- $0,i,-1$ إلى $-1,10$

ب- $0,1,2$ إلى $0,1,\infty$

جـ- $0,1,\infty$ إلى $-1,\infty,1$

د - $-1, i, 1$ إلى $-1, 0, i$

7- جد الاقتران العكسي للاقترانات التي حصلت عليها في التمرين السابق.

8- بين أن الاقتران:

$$f(z)=\frac{i+z}{i-z}$$

ينقل قرص الوحدة إلى نصف المستوى الأيمن أي $Re.\ w > 0$.

9- جد اقتراناً ينقل المنطقة الهلالية الواقعة داخل الدائرة $|z-2| = 2$ وخارج الدائرة $|z-1|=1$ إلى شريحة أفقية.

10- جد اقتراناً مزدوج الخطية f ينقل قرص الوحدة $|z| < 1$ إلى نصف المستوى الأيمن $Re.w > 0$ بحيث إن $f(-i) = 0$.

11- جد اقترانا مزدوج الخطية ينقل النصف السفلي للمستوى إلى القرص $|z-1|<1$.

12- بين أن الاقتران $f(z) = e^z$ ينقل المنطقة المستطيلة R حيث:

$$R = \{z : \alpha < Rez < \beta, \gamma < Im.z < \delta\}$$

إلى المنطقة الحلقية S حيث إن:

$$S = \{re^{\theta i} : e^{\alpha} < r < e^{\beta}, \gamma < \theta < \delta\}$$

13- بين أن الاقتران: $f(z)=\frac{e^z-i}{e^z+1}$.

ينقل الشريحة R حيث:

$R = \{z : 0 < Im.z < \pi$

إلى قرص الوحدة $|w| < 1$.

14- بين أن الاقتران:

$$f(z)=Log\frac{1+z}{1-z}$$

ينقل قرص الوحدة $|z| < 1$ إلى الشريحة R حيث:

$$R=\left\{w:-\frac{\pi}{2}<Im.w<\frac{\pi}{2}\right\}$$

15- جد اقترانا ينقل المنطقة الهلالية المذكورة في التمرين 9 إلى كل المستوى المركب.

اقتراح: استعن بتمرين 9 وكون الاقتران $f(z)= e^z$ ينقل شريحة أفقية إلى كل المستوى المركب.

16- بين أن الاقتران مزدوج الخطية f الذي يثبت النقطتين 1,1-. (أي $f(-1)=f(1)=1$ هو $f(z)=\frac{z+\alpha}{\alpha z+1}$.

حيث $\alpha = T(0) \neq \infty$.

17- جد اقترانا مزدوج الخطية ينقل الدائرة $|z|= 1$ إلى الدائرة $|w-1|=1$.

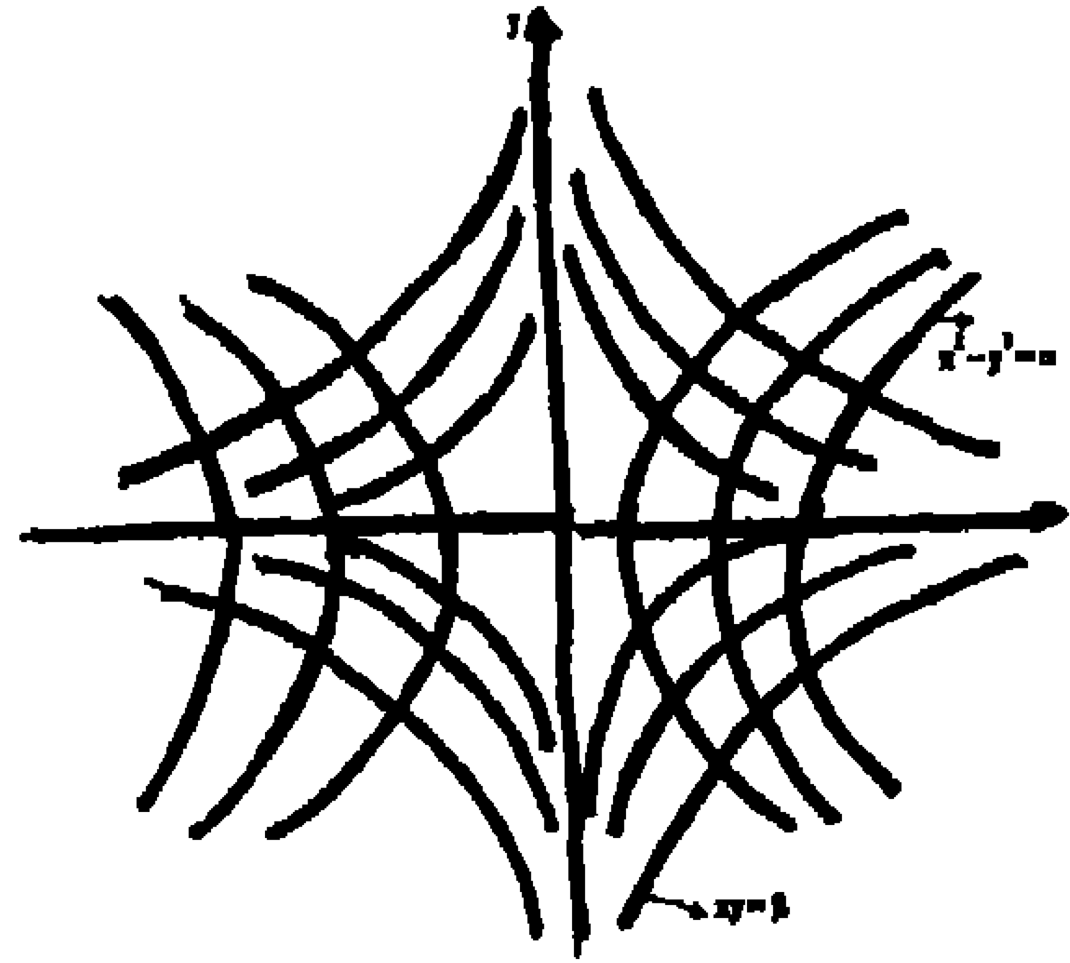
18- جد اقترانا الخطية f يثبت النقطتين 0,1 بحيث إن $f(-1) = \infty$.

19- جد اقترانا مزدوج الخطية ينقل المحور الحقيقي x إلى نفسه والمحور التخيلي y إلى الدائرة $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

20- جد اقترانا مزدوج الخطية ينقل المحور الحقيقي x إلى نفسه والمستقيم $y = x$ إلى الدائرة $|w+i|=\sqrt{2}$.

21- بين أن منحنيات المستوى للاقتران $f(z)=z^2$ تقاطع بزاوية متعامدة وهما عائلتان من القطع الزائد.

اقتراح : $f(z) =z^2=x^2 - y^2 + 2xyi$ نفرض أن $x^2-y^2 = \alpha$ تحصل على إحدى العائلات وبفرض أن $2xy = \beta$ تحصل على العائلة الثانية. كما يبين الشكل (11)



شكل (11)

22- بين أن منحنيات المستوى للاقتران:

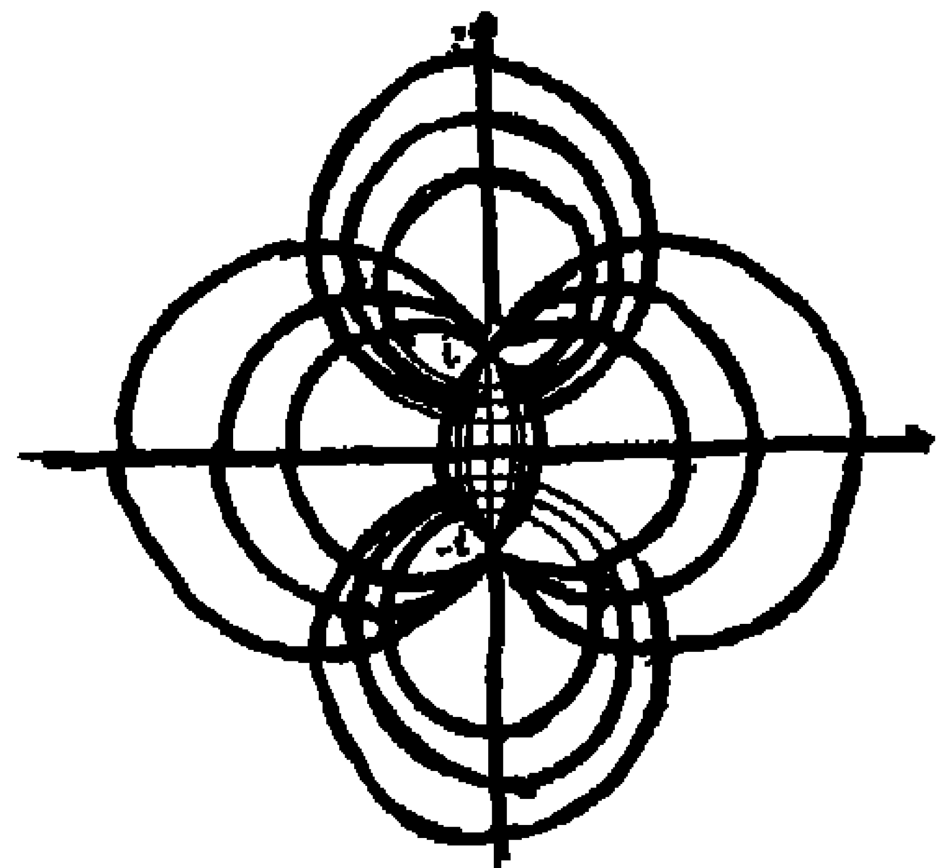
$$f(z)=\mathrm{Log}\frac{z-i}{z+i}$$

عبارة عن عائلتين من الدوائر. إحداهما تمر دائما في النقطتين i ,-i.

اقتراح: بفرض أن الجزء الحقيقي للاقتران مقدار ثابت نحصل على الدوائر: (ثابت = α) $|z-i| = \alpha|z+i|$، وبفرض أن الجزء التخيلي Im.f مقدار ثابت نحصل على الدوائر)

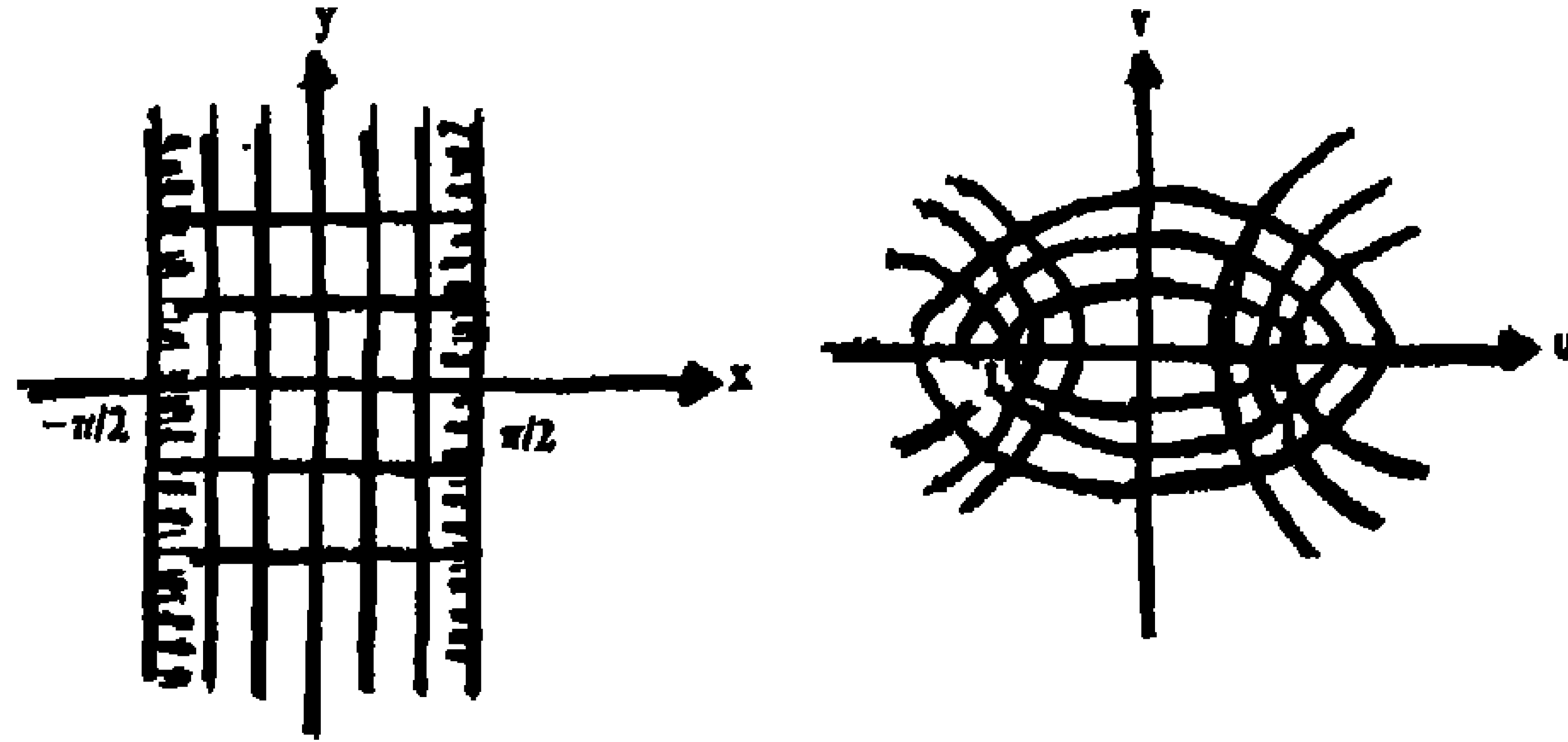
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=\beta$$

(β = مقدار ثابت). ولها الشكل (12).



شكل (12)

23- جد أين يكون الاقتران $f(z) = \sin z$ اقترانا مطابقا وواحـــدا لواحـد وبـين أنـه ينقـل الشـريحة الرأسـية R حيـث $R=\left\{z: |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\right\}$ إلى المسـتوى المركـب باستثناء المستقيمين $u \geq 1,\ v = 0,\ u \leq -1,\ v = 0$ وينقـل الخطـوط المستقيمة الأفقية و الرأسية في الشريحة R إلى قطوع ناقصة وأخرى زائدة. كما في الشكل (13).



شكل (13)

24- بين أن الاقـتران مـزدوج الخطيـة يمكـن اعتبـاره تركيبـا لعـدة اقترانـات مثـل الإزاحة، الدوران، التكبير، المقلوب.

اقتراح: فسر ما يلي:

$$f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \alpha\delta \neq \gamma\beta$$

$$=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\left(z+\frac{\delta}{\gamma}\right)}+\frac{\alpha}{\gamma}$$

25- بفرض أن الاقتران $f(z) = u + vi$ كلي فإذا كانf مطابقا فـبرهن أن منحنيـات المستوى: ثابت $= u(x,y) = \alpha$، ومنحنيات المستوى : ثابت $= v(x,y) = \beta$ تتقاطع تعامديا.

تحويل شوارتز - كرستوفل (Scheartz -Christoffel):

في أمثلة الاقترانات المطابقة والاقترانات مزدوجة الخطية لاحظنا أنه يمكن أن نجد اقترانا ينقل نصف المستوى العلوي مثلا إلى قرص مفتوح أو العكس. هذه الحقيقة أثبتت من قبل العالم الألماني ريمان Riemann وعرفت باسمه وهي:

نظرية (نظرية تطبيق ريمان):

إذا فرض أن D مجال مترابط ترابطا بسيطا، مجموعة النقاط الحدودية له تتكون من نقطتين على الأقل (أي أن D يختلف عن المستوى نفسه) وكانت z_0 نقطة في المجال D فإنه يوجد اقتران مطابق واحد لواحد (تحليلي) f ينقل هذا المجال D إلى قرص الوحدة $|w| < 1$ بحيث إن $f(z_0)=0$ وأن هذا الاقتران يتحدد تماما بالشرط $f'(z_0)>0$ نقبل هذه النظرية بدون برهان ونترك برهانها لمستوى أعلى من هذا الكتاب.

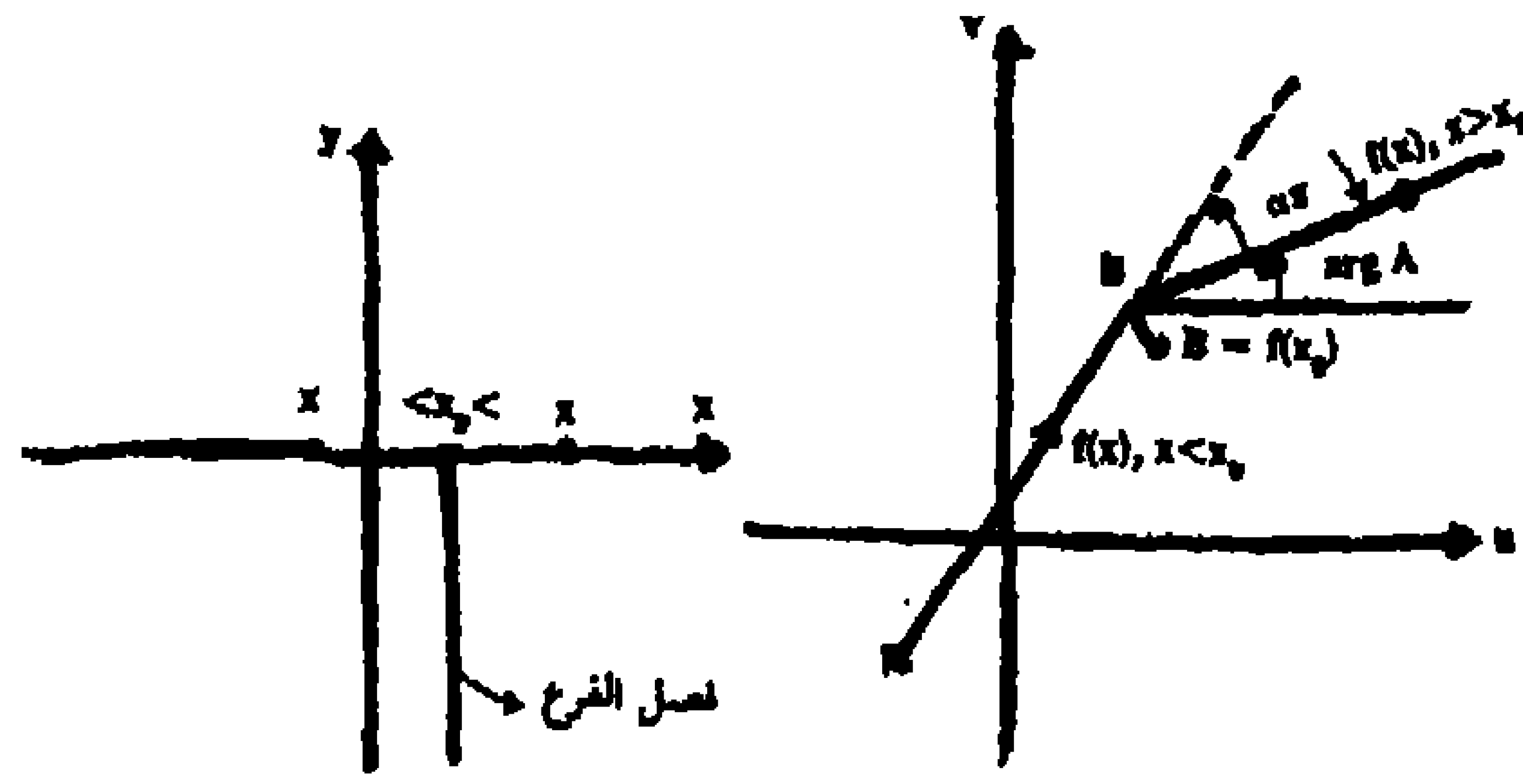
إذن مثل هذا الاقتران دائما موجود وينقل أي مجال يحقق شروط النظرية إلى قرص الوحدة ويمكن أن نستنتج من ذلك أنه يمكن إيجاد اقتران تحليلي واحد لواحد ينقل أي مجال مترابط ترابطا بسيطا نقاطه الحدودية أكثر من نقطتين إلى مجال آخر مثله.

فهل يمكن أن نجد اقترانا تحليليا واحدا لواحد ينقل النصف العلوي من المستوى إلى مجال محدود بمضلع ما. هذا ما أثبته العالمان شوارتز وكريستوفل - (Schwartz Christoffel). وحتى نفهم كيفية إنشاء تحويل شوارتز - كريستوفل نمهد له بالمقدمة التالية:

نفرض أن لدينا اقترانا f يحقق الشرط :

$$f'(z) = A\,(z-x_0)^{\alpha}$$

بحيث إن α, x_0 أعداد حقيقية وإن $-1 < \alpha < 1$، A عدد مركب ونريد أن ندرس تأثير هذا الاقتران على المحور الأفقي x.



شكل (14)

من الواضح أن صورة x_0 هي $w = B$ وأن الجذر يمكن اختياره في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$ وذلك باعتبار أن الجزء السالب من المستقيم $x = x_0$ محذوف لأنه يمثل فصل الفرع عند x_0 ولإيجاد صورة الأعداد الحقيقية x نفرض أولا أن x أكبر من x_0 فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \arg (x-x_0) + \arg A$$

وبما أن $x-x_0$ موجبة فإن $\arg (x-x_0)$ التي تقع في الفترة المذكورة أعلاه هي 0 وبالتالي فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \,.\, 0 + \arg A$$

وبما أن A عدد مركب ثابت فإن $\arg f'(x) = \arg A$ مقدار ثابت، وعليه فإن صورة كل الأعداد التي تقع على يمين x_0 عبارة عن خط مستقيم يميل بمقدار $\arg A$ عن المحور الحقيقي u. أما إذا كانت x أقل من x_0 فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \arg(x-x_0) + \arg A$$

وبما أن $x-x_0$ سالبة (وحقيقية) فإن $\arg(x-x_0)$ التي تقع في الفترة المذكورة أعلاه هي π أي أن:

$$\arg f'x(x) = \alpha.\, \pi + \arg A$$

وهذه القيمة ثابتة أيضا. مما يدل على أن صورة كل الأعداد الحقيقية التي تقع على يسار x_0 تقع على خط مستقيم ميله عن المحور الحقيقي u هو $\alpha\pi + \arg A$ والمستقيمان يلتقيان عند النقطة B التي تمثل صورة x_0.

إذا فهمنا ذلك فإنه من الممكن أن نتقدم خطوة أخرى في التعميم للاقتراب أكثر من المطلوب.

نفرض أن الاقتران f يحقق الشرط: $f'(z)=A(z-x_1)^{\alpha_1}(z-x_n)^{\alpha_2}...(z-x_n)^{\alpha_n}$

بحيث إن $\alpha_1, \alpha_2, ...,\alpha_n$ أعداد حقيقية تحقق $-1 < \alpha_k<1$ و $k = 1,2, ...n,$ وكذلك $x_1,x_2,....., x_n$ أعداد حقيقية ولكن A عدد مركب غير الصفر بالطبع وكذلك $-\frac{\pi}{2}< \arg ل(z-x_k)<3\frac{\pi}{2}$ لكل $k =1,2,....,n$.

ولدراسة تأثير هذا الاقتران على المحور الحقيقي x فإن:

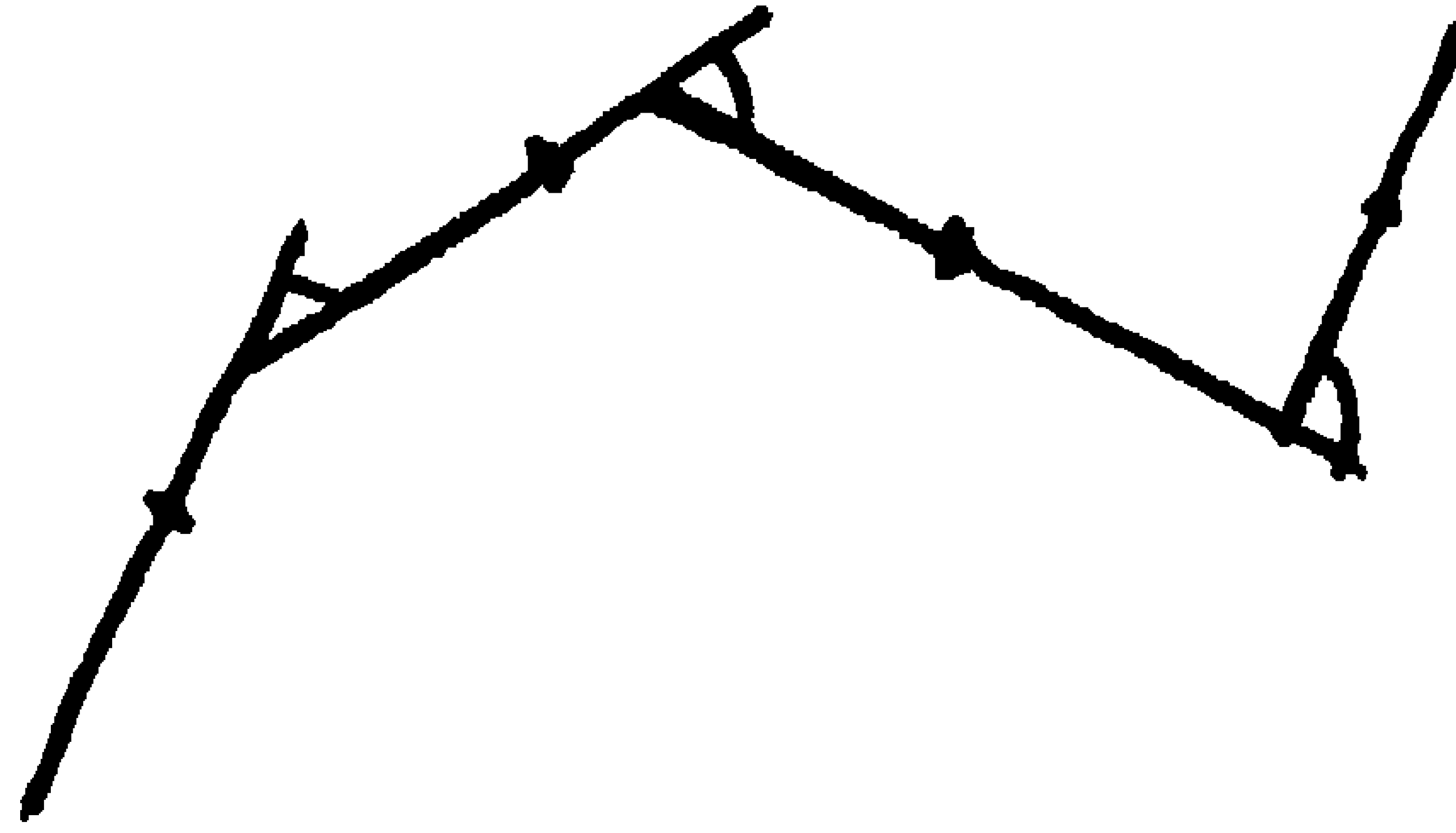
$\arg (f'(x)) = \arg A + \alpha_1 \arg (x-x_1) + \alpha_2 \arg (x-x_2) + ...+ \alpha_n \arg(x-x_n).$

وإذا فرضنا أن صورة الأعداد الحقيقية $x_1,x_2, ...,x_n$ هي على الترتيب $w_1,w_2,.....,w_n$ فإن صورة القطع المستقيمة هي قطع مستقيمة أخرى زوايا ميلها كما يلي:

زاوية الميل	الفترة
$\arg A + \alpha_1\pi+ \alpha_2\pi+ .....+ \alpha_n\pi$	$(-\infty,x)$
$\arg A + \alpha_2\pi+ \alpha_3\pi+ .....+ \alpha_n\pi$	(x_1,x_2)
...	...
$\arg A + \alpha_n\pi$	(x_{n-1},x_n)
$\arg A$	(x_n, ∞)

وذلك بتطبيق المقدمة من أسفل إلى أعلى.

مما تقدم يتبين لنا أن الاقتران f ينقل المحور الحقيقي x إلى مضلع.

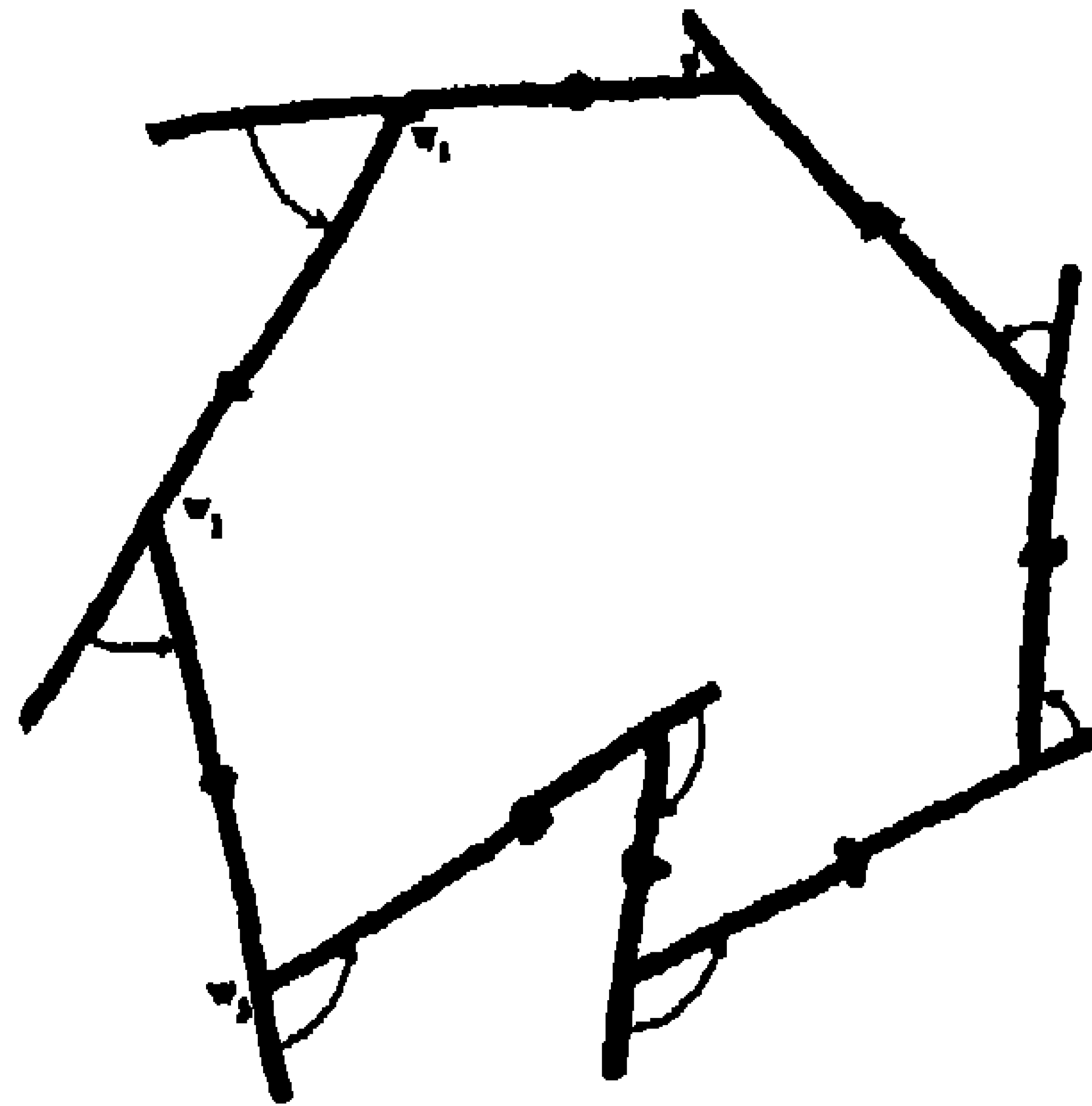


شكل (15)

ولإيجاد الاقتران f فإنه معرف بالمساواة التالية:

$$f(z)=A\int_{0}^{z}(s-x_1)^{\alpha_1}.(s-x_2)^{\alpha_2}....(s-x_n)^{\alpha_n}\,ds+B$$

وحتى نضع هذه المناقشة بالشكل الاصطلاحي لتحويل شوارتز - كريستوفل نريد أن نجد المضلع الموجب الاتجاه وبالتالي الحركة عكس عقارب الساعة كما هي مبينة بالشكل (16)



شكل (16)

فيكون قياس الزوايا (زوايا الميل) من الخارج إلى الداخل أي عكس عقارب الساعة ونكون بذلك قد درنا دورة كاملة مقدارها 2π. فإذا فرضنا بدلا من الزوايا $\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_n$ الزوايا $\theta_1,\theta_2,........,\theta_n$ التي مجموعها 2π بحيث إن:

$-\pi<\theta_k<\pi$ فإن $\alpha_k=\frac{\theta_k}{\pi}$ (لأن $-1<\alpha_k<1$) وكذلك إذا فرضنا أن $x_1<x_2<......<x_{n-1}$ (بحذف x_n حتى يمكن أن نفرضها لتساوي الرمز ∞) بحيث إن:

$$w_1=f(x_1),\ w_2=f(x_2)\ ,\ .....,\ w_{n-1}=f(x_{n-1}),$$
$$w_n=f(\infty)$$

فإن الاقتران المطلوب هو:

$$f(z)=A\int_0^z(s-x_1)^{-\theta_1/\pi}(s-x_2)^{-\theta_2/\pi}......(s-x_{n-1})^{-\theta_{n-1}/\pi}dx+B$$

وهذا الاقتران يسمى تحويل شوارتز - كريستوفل.

نظرية (نظرية شوارتز - كريستوفل):

إذا كان K مضلعا في المستوى له الرؤوس $w_1,w_2,\ ...,\ w_n$ بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) وكانت زواياه الخارجية هي على الترتيب $\theta_1,\theta_2,\ .....,\theta_n$ فإنه يوجد أعداد حقيقية $x_1,x_2,\ ....,\ x_{n-1}$ وعدد مركب A بحيث إن الاقتران f المعرف بالمساواة (7) ينقل نصف المستوى العلوي بشكل واحد لواحد إلى المنطقة الداخلية للمضلع K بحيث إن:

$$w_1=f(x_1),\ w_2=f(x_2),\ .....,\ w_{n-1}=f(x_{n-1}),\ w_n=f(\infty)$$

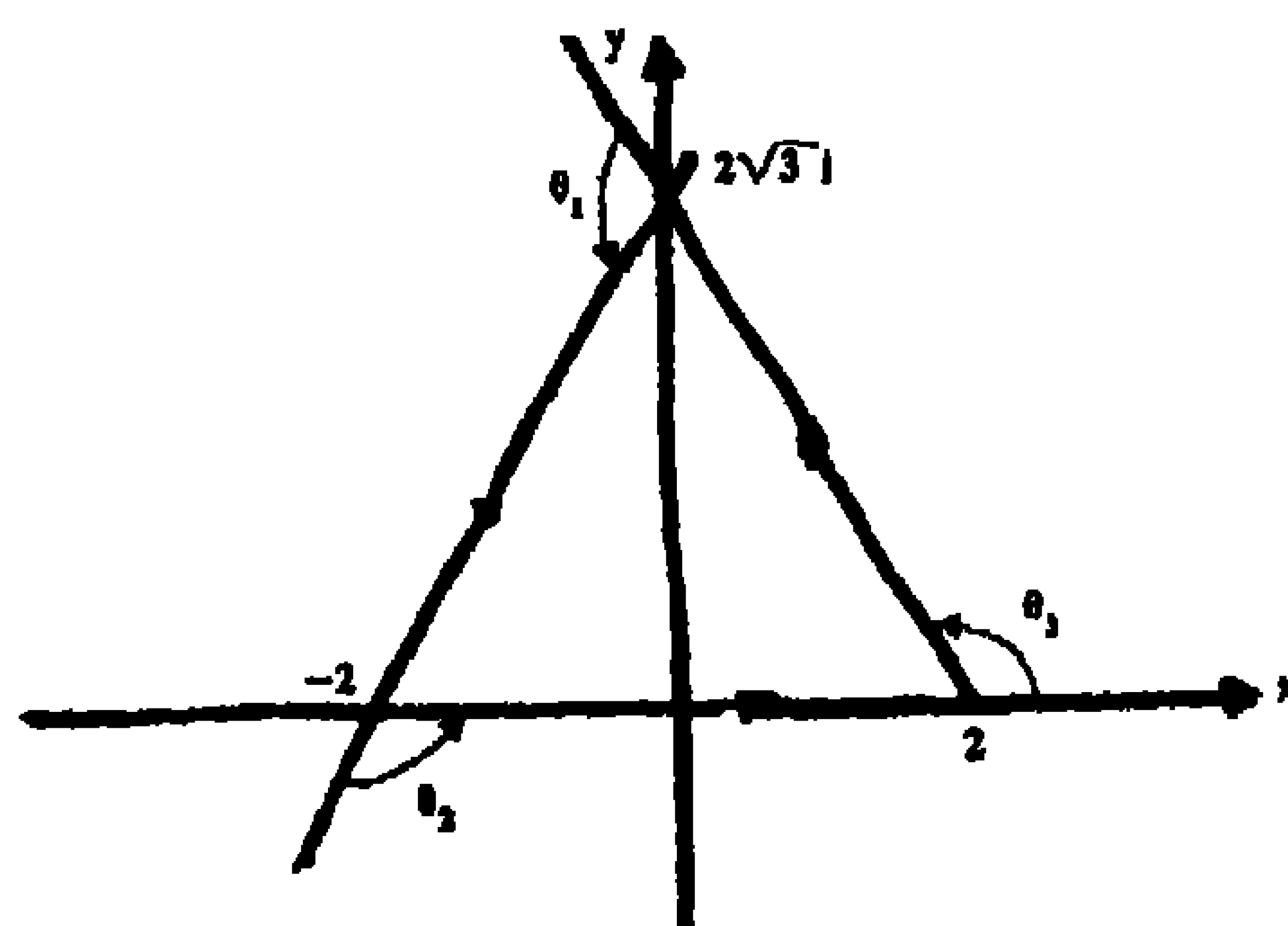
بحيث إن $w_n=f(\infty)$ تفهم على أنها:

$$f(\infty)=w_n=\lim_{|z|\to\infty}f(x)$$

نترك برهان هذه النظرية لمستوى أعلى من هذا الكتاب. ونكتفي بالمقدمة التي شرحت للحصول على هذا الاقتران. ونترك تفاصيل إيجاد تحويلات شوارتز - كريستوفل للأمثلة التالية: وسنترك تطبيقات هذا التحويل للبند القادم.

مثال VII-32:

جد تحويل شوارتز - كريستوفل الذي ينقل نصف المستوى العلوي إلى المنطقة الداخلية للمثلث المتساوي الأضلاع الذي رؤوسه $-2,2,2i\sqrt{3}$.



شكل (17)

الحل:

من كون المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الخارجية هي $2\pi/3$ لذلك فإن $\theta_k = 2\pi/3,\ k = 1,2,3$. ولتسهيل العمليات الحسابية نختار قيما مناسبة للمتغير x مثلا $x_1=-1,\ x_2=1$ فتكون $-2=f(-1), 2=f(1), 2i\sqrt{3}=f(\infty)$ حتى يكون الترتيب موجبا (عكس عقارب الساعة) وعليه فإن العلاقة (7-39) نبين أن الاقتران هو:

$$f(z)=A\int_0^z (s-x_1)^{-\theta_1/\pi}(s-x_2)^{-\theta_2/\pi}ds+B$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$f(z)=A\int_0^z (s+1)^{-2/3}(s-1)^{-2/3}ds+B$$

وحتى نجد الثابتين A,B نستخدم الشروط الحدودية وهي:

$f(1) = 2,\ f(-1) = -2$ لنحصل على ما يلي:

$$-2=f(-1)=A\int_0^{-1}\frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}ds+B,\quad 2=f(1)=A\int_0^{1}\frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}ds+B$$

ولإكمال الحل ننوه إلى ضرورة الاستفادة من جداول التكامل في التفاضل والتكامل ما أمكن، أو نترك أمر إيجاد مثل هذه التكاملات للتفاضل والتكامل توفير للوقت. فإذا فرضنا أن:

$$\beta=\int_0^1 \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}ds,\alpha=\int_0^{-1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}ds$$

فإن الثوابت تأخذ القيم التالية:

$$A=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 1\end{vmatrix}}=\frac{-4}{\alpha-\beta},\beta=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & -2\\ \beta & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 1\end{vmatrix}}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$$

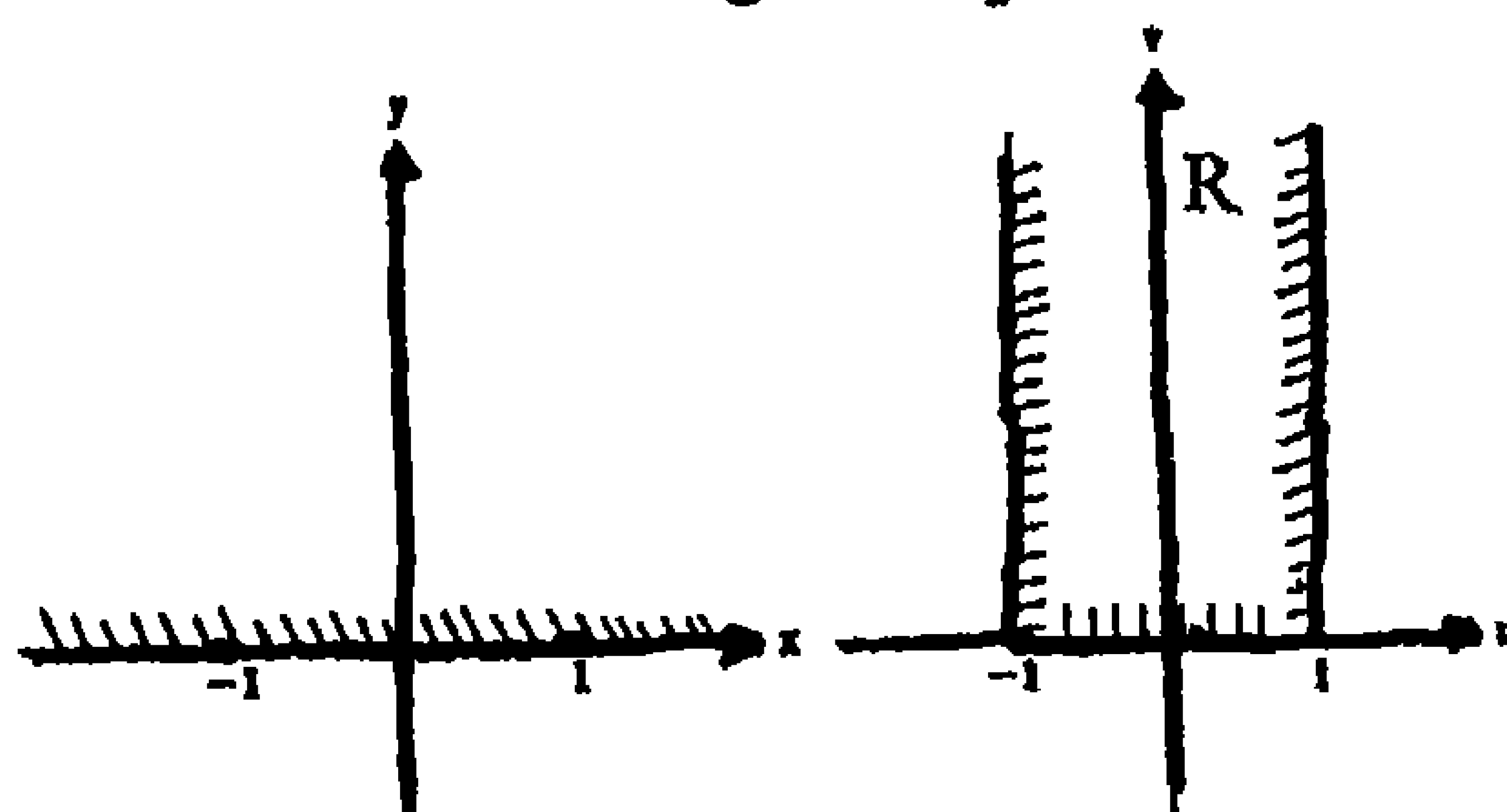
مثال VII-33:

جد تحويل شـوارتز - كريسـتوفل الـذي ينقـل النصـف العلـوي للمسـتوى المركب $Im.z>0$ إلى نصف الشريحة اللانهائية R حيث:

$$R=\{w: |Re\,.\,w|<1, Im.\,w>0\}$$

الحل:

حدود هذه الشريحة كما تبدو في الشكل (18).



شكل (18)

لاحظ أن الزوايا الخارجية للمضلع المكون لأضلاع الشريحة R هـي $\theta=\pi/2$ وأن $w_1=-1. w_2=1$.

وباختيار القيم $x_1=-1, x_2=1$ فإن الاقتران المطلوب هو:

$$f(z)=A\int_0^z (s+1)^{-1/2}(s-1)^{-1/2}\,ds+B$$

$$=A\int_0^z \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\,ds+B$$

ولإيجاد قيم الثوابت A,B نستفيد من الشروط الحدودية وهي $w_1=f(x_1),w_2=f(x_1)$ وعليه فإن:

$$-1=f(-1)=A\int_0^{-1}\frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\,ds+B$$

$$1=f(1)=A\int_0^{1}\frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\,ds+B$$

وبإيجاد قيمة التكامل:

$$\frac{1}{i}\int_0^{-1}\frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\,ds=\frac{-1}{i}\sin^{-1}s\Big|_{-1}^{0}$$

$$= -i\sin^{-1}(-1),$$

$$= +i\sin^{-1}(1),$$

$$\frac{1}{i}\int_0^{1}\frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\,ds=\frac{1}{i}\sin^{-1}s\Big|_{0}^{1}$$

$$= -i\sin^{-1}(1)$$

ومن ذلك فإن:

$$-1 = A\,(i\sin^{-1}1)+B,$$

$$1 = A\,(-i\sin^{-1}1)+B,$$

وهذا يعني أن:

$$A=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}i\sin^{-1}1 & -1\\ -i\sin^{-1}1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2i}{\pi},\quad B=\frac{\begin{vmatrix}i\sin^{-1}1 & -1\\ -i\sin^{-1}1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}i\sin^{-1}1 & 1\\ -i\sin^{-1}1 & 1\end{vmatrix}}=0.$$

وبذلك فإن الاقتران المطلوب هو:

$$f(z)=\frac{2i}{\pi}\int_0^z \frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}ds$$

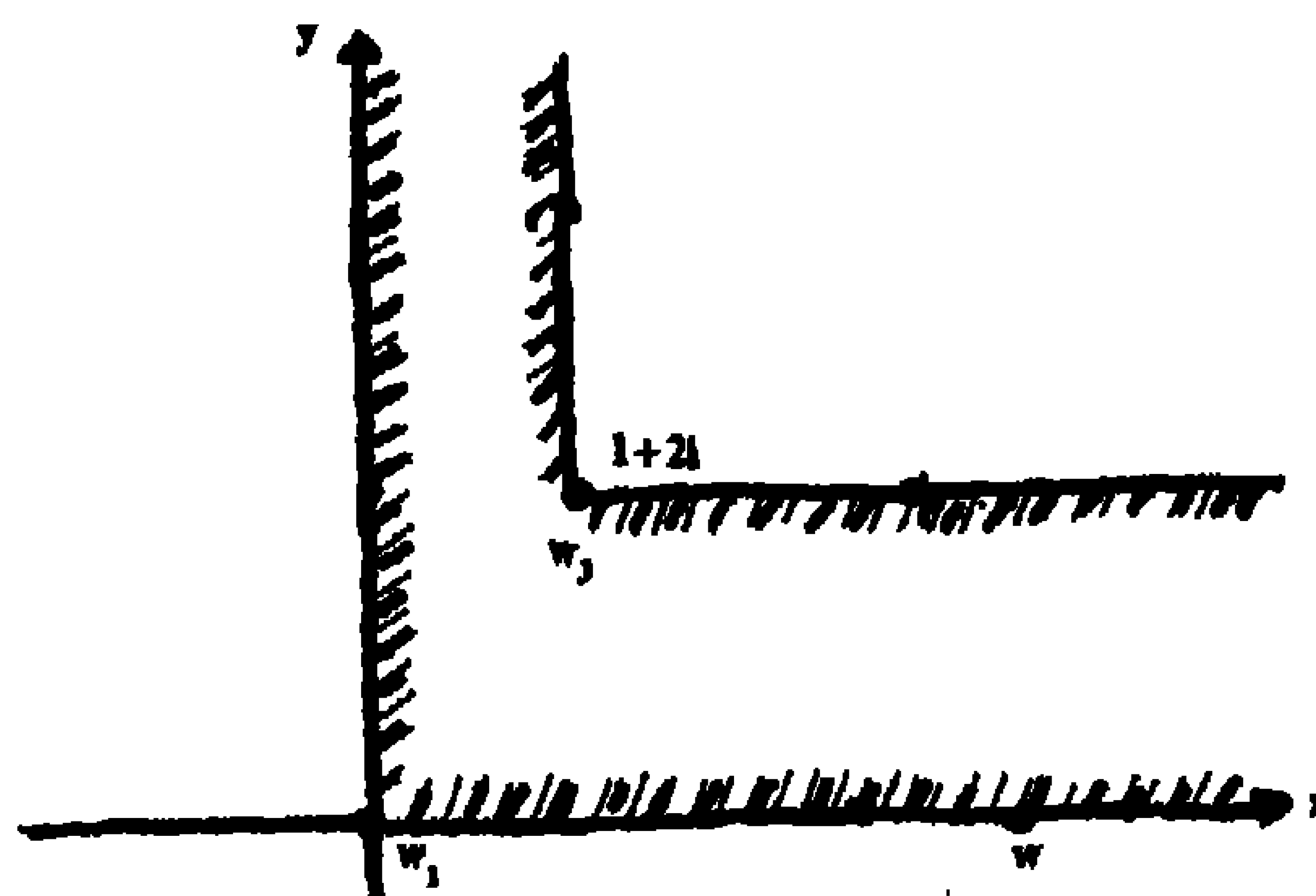
أي أن:

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1} z.$$

ننهي هذا البند بالمثال التالي:

مثال:

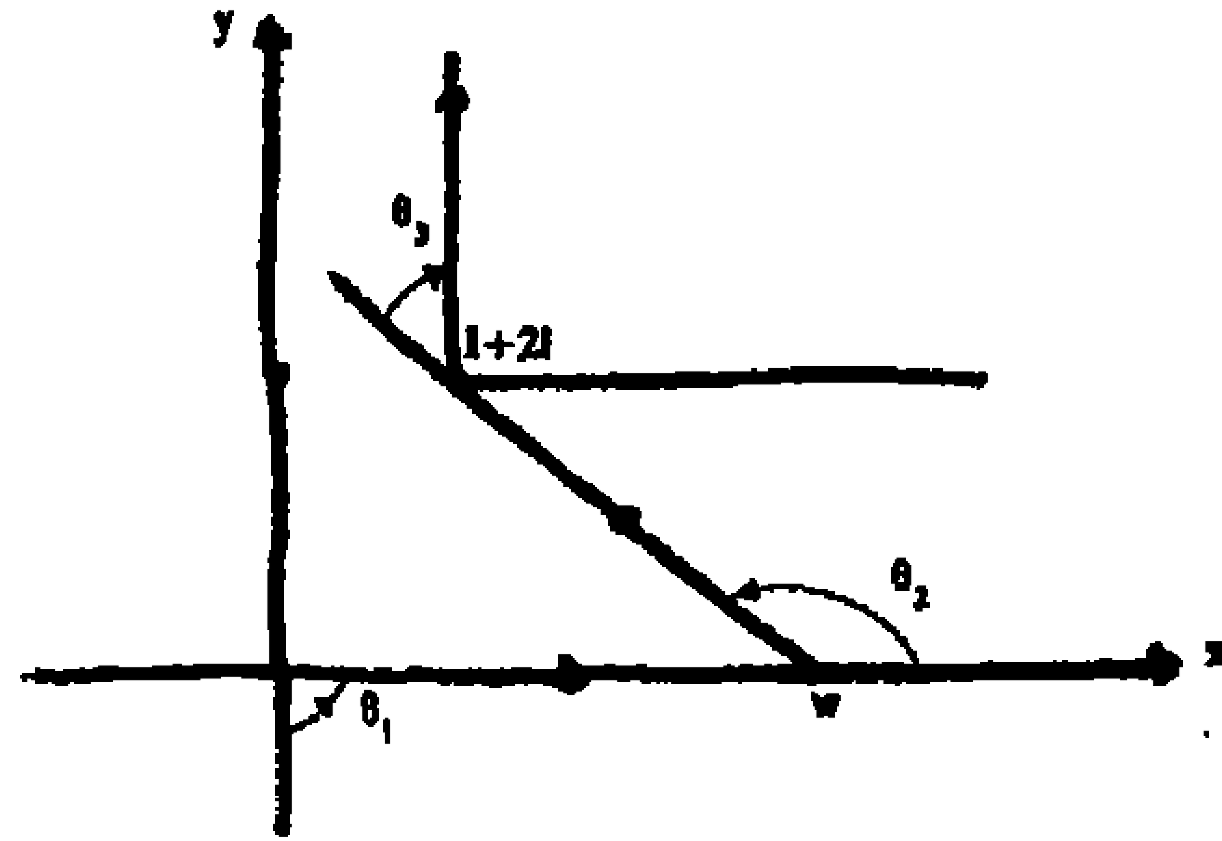
جد تحويل شوارتز كريستوفل الذي ينقل نصف المستوى العلـوي إلى النفـق الظاهر في الشكل (19).



شكل (19)

الحل:

واضح أن النقاط التي تمثل زوايا المضلع هامـة وفي الشـكل (19) ظـاهر لنـا زاويتان لذلك نفرض أن الزاوية الأخرى هي ∞ وقبل ذلك نفرض نقطـة w علـى المحور u تمثل الزاوية الثالثة لكي يكتمل المضلع المطلوب كما هو واضح في الشـكل (20).



شكل (20)

فتكون الزوايا الخارجية للمضلع هي على الترتيب $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ حيث $\theta_1= \pi/2$ وإذا تركنا w تقترب من الرمز ∞ فإن الزاوية θ_2 تقترب من π وبما أن اتجاه السهم للزاوية θ_3 مع عقارب الساعة فهي إذن سالبة وعندما تقترب w من ∞ فإن θ_3 تقترب من $(-\pi/2)$ وعليه فإن الزوايا هي على الترتيب $\pi/2,\ \pi,-\pi/2$ وإذا اخترنا النقاط 1,0,1- فإن الاقتران المطلوب هو:

$$f(z)=A\int_0^z (s+1)^{-\pi/2\pi}(s-0)^{-\pi/\pi}(s-1)^{\pi/2\pi}ds+B$$

حيث إن:

$$f(1) = 1+ 2i,\ f(-1) = 0,\ f(0) = \infty$$

ولذلك فإن:

$$f(z)=A\int_0^z (s+1)^{-1/2}s^{-1}(s-1)^{1/2}ds+B$$

ولإيجاد الثوابت A,B نجد قيمة التكامل عند الشروط الحدودية، ولإيجاد التكامل فإن:

$$\int \frac{\sqrt{s-1}}{s\sqrt{s+1}}ds=\int_0^z \frac{s-1}{s\sqrt{s^2-1}}ds$$

$$=\int_0^z \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}ds-\int_0^z \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}ds$$

$$=-i\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds-\sec^{-1}s$$

$$= (-i\sin^{-1}s - \sec^{-1} s)\Big|_0^z$$

$$= -i \sin^{-1}z - \sec^{-1} z + \pi/2$$

وعند الشروط الحدودية فإن:

$$0=f(-1)= A\int_0^{-1} \frac{s-1}{s\sqrt{s^2-1}}ds+B;$$

$$0=A\left(i\sin^{-1}1-\sec^{-1}(-1)+\frac{\pi}{2}\right)+B$$

وبالتالي فإن:

$$=A\left(\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{2}\right)+B,$$

$$=\frac{\pi}{2}(i-i)A+B$$

وكذلك:

$$1+2i=f(1)=A\left(-i\sin^{-1}1-\sec^{-1}1+\frac{\pi}{2}\right)+B,$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)A+B$$

وعليه فإن:

$$A=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{1+2i}{-1+i}\right)$$

وكذلك:

$$B=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 0 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1+2i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}(1+2i)$$

ولذلك فإن التحويل المطلوب هو الاقتران:

$$f(z)=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{1+2i}{-1+i}\right)\left\{-i\sin^{-1}z-\sec^{-1}z+\frac{\pi}{2}\right\}+\frac{1}{2}(1+2i)$$
$$=\frac{3i-1}{2\pi}\left(-i\sin^{-1}z-\sec^{-1}z+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}(1+2i)$$

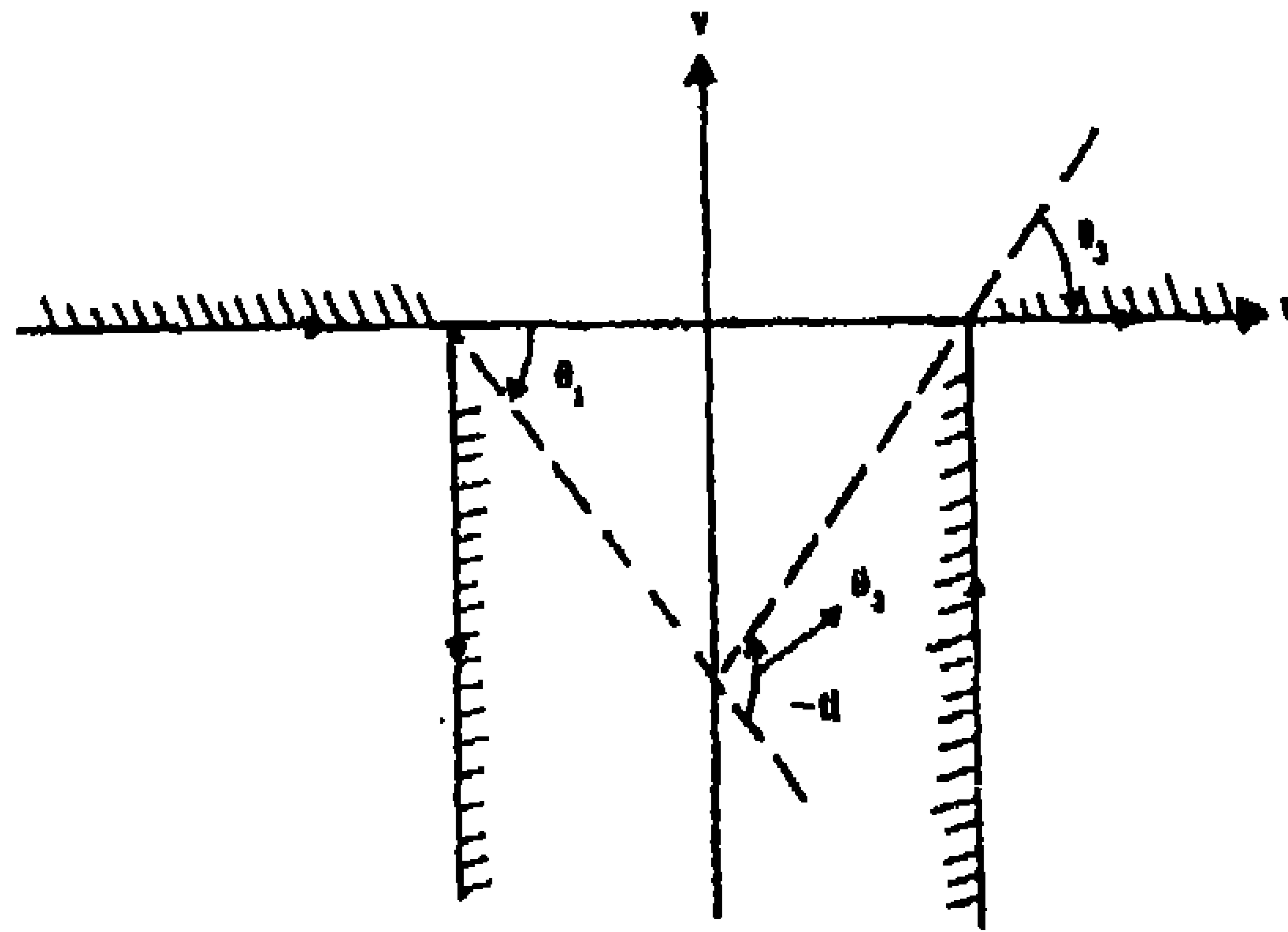
تمارين

1- جد تويل شوارتز - كريستوفل الذي يينقل نصف المستوى العلوي Im.z>0 إلى الشريحة اللانهائية R حيث:

$$R = \{w : 0 < I,. w < 1\}$$

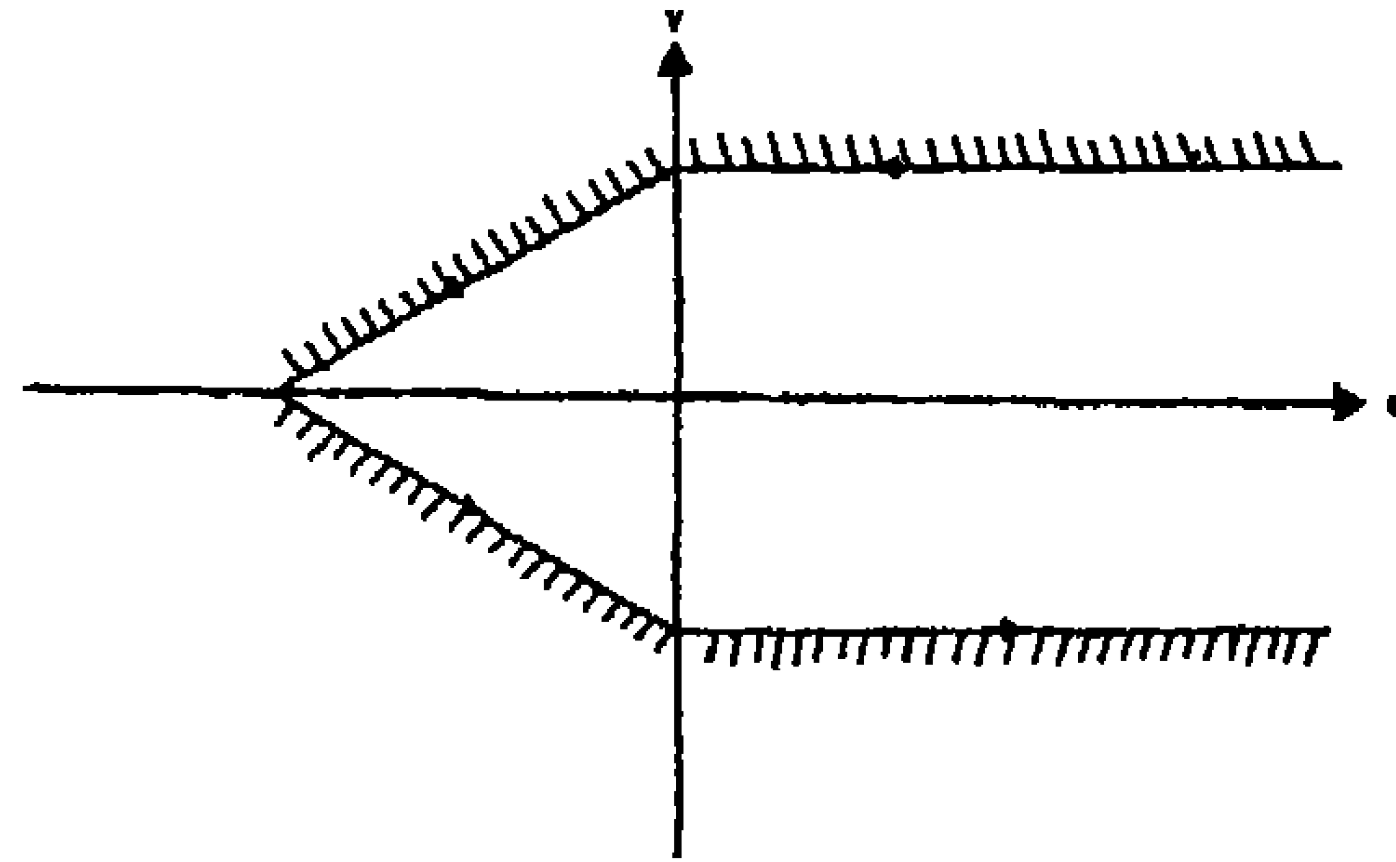
2- جد تحويل شوارتز - كريستوفل الذي ينقل نصف المستوى العلـوي Im.z > 0 إلى الشكل (21).

اقتراح: افرض الزاوية الثالثة عند t>0,-ti . ثم خذ النهاية عندما t →∞ لإيجـاد الزاوية الثالثة.



شكل (21)

3- جد تحويل شوارتز - كريستوفل الذي ينقل نصف المسـتوى العلـوي Im. z>0 إلى الشكل (22).



شكل (22)

4- جد تحويل شوارتز - كريستوفل الذي ينقل نصف المستوى العلوي من المستوى إلى المجال D حيث.

$$D=\left\{w:|\text{Re}.w|<\frac{\pi}{2},\text{Im}\,w<0\right\}$$

5- بين أن الاقتران

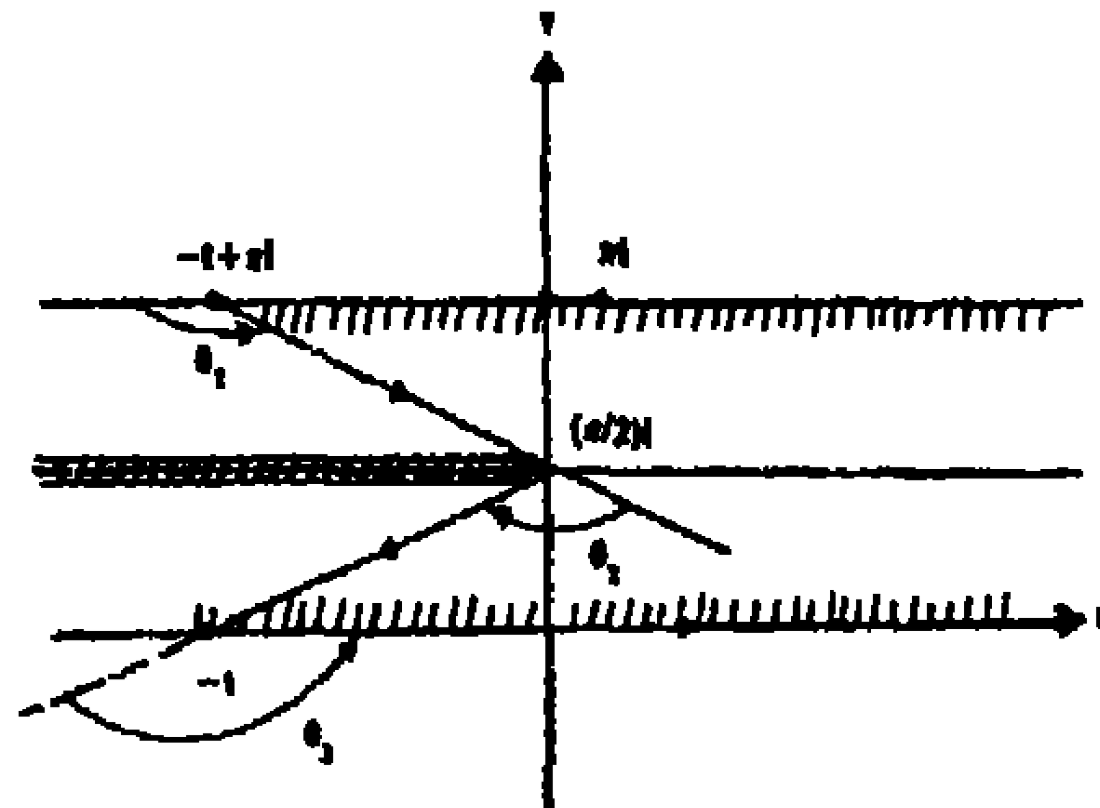
$$f(z)=\frac{1}{2}\text{Log}\left(z^2-1\right)$$

ينقل النصف العلوي من المستوى المركب $\text{Im}\,z>0$ إلى الشريحة.

$R=\{w:0<\text{Im}.\,w<\pi$ باستثناء الشعاع $u\leq 0, v=\frac{\pi}{2}$.

اقتراح : استعن بتحويل شوارتز - كريستوفل للشكل (23).

لاحظ الرؤوس الثلاثة: لتحد الزوايا لها اجعل t تقترب من ∞ لتحصل على المطلوب.

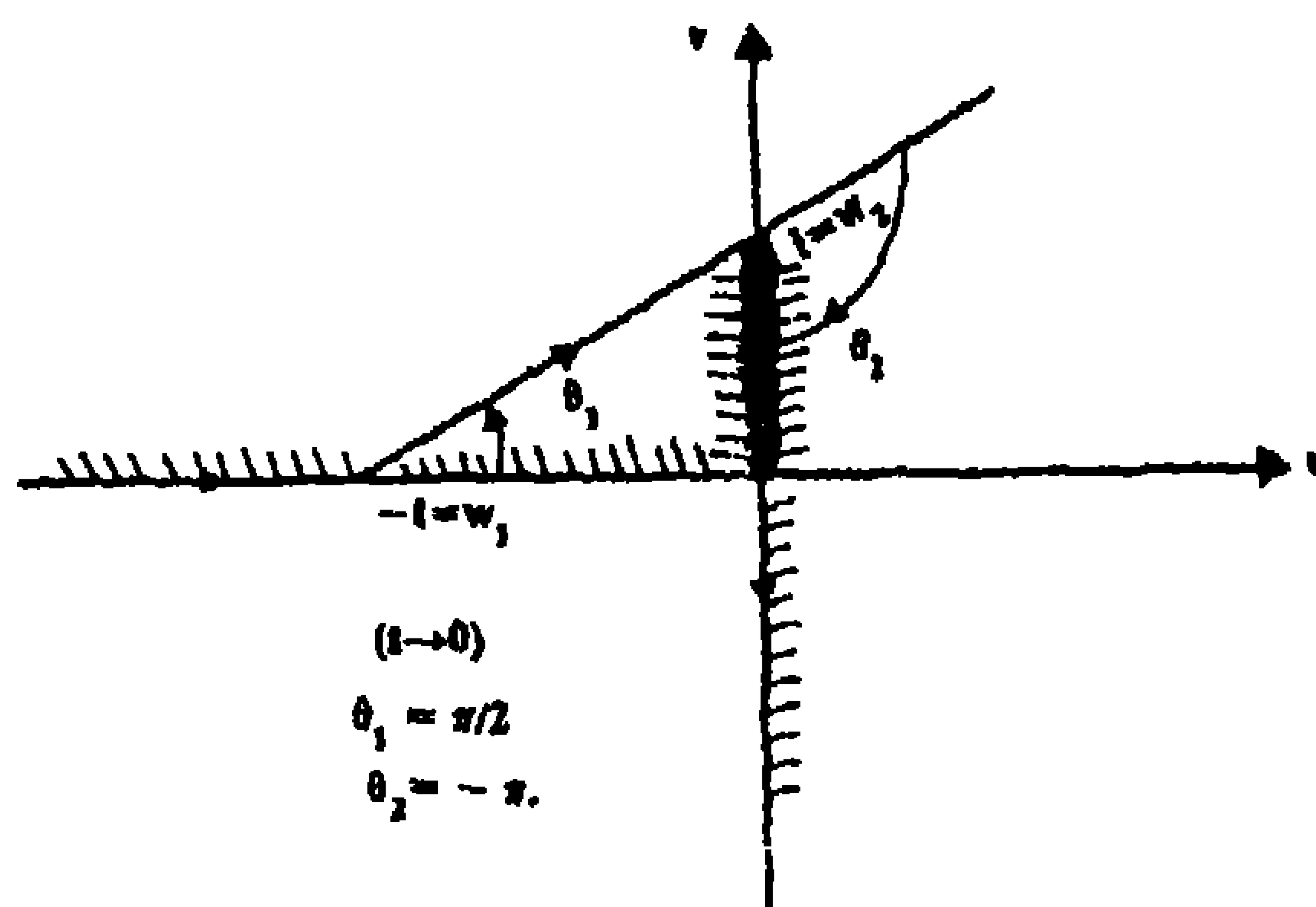


شكل (23)

6- بين أن الاقتران:

$$f(z)=\frac{-1}{2}iz^{1/2}(z-3)$$

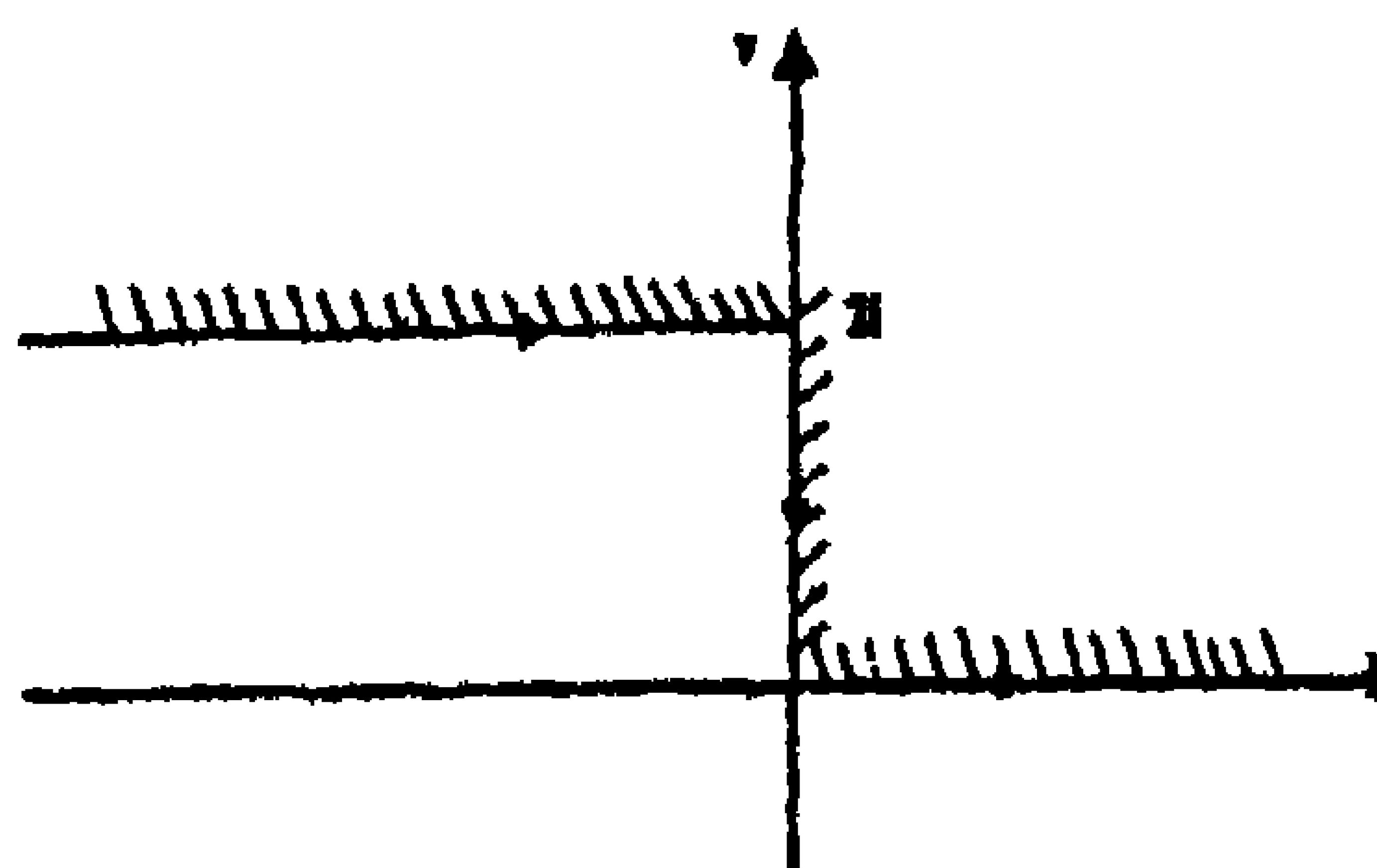
ينقل النصف العلـوي للمسـتوى المركـب Im.z >0 إلى القسـم المظلـل مـن الشكل (23).



شكل (24)

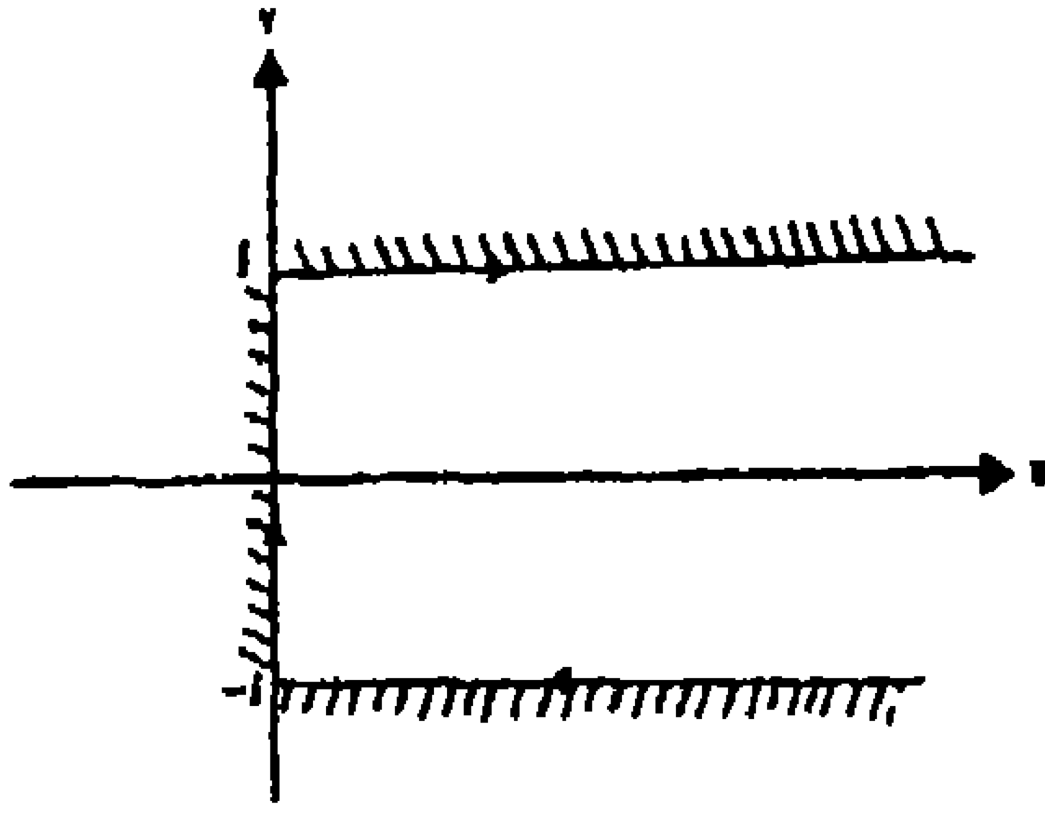
اقتراح: جد تحويل شوارتز- كريستوفل للشكل (24).

7- جد تحويل شوارتز - كريستوفل الذي ينقل نصف المستوى العلوي Im.z>0 إلى الأشكال (25-أ ، ب ، ج ، د).

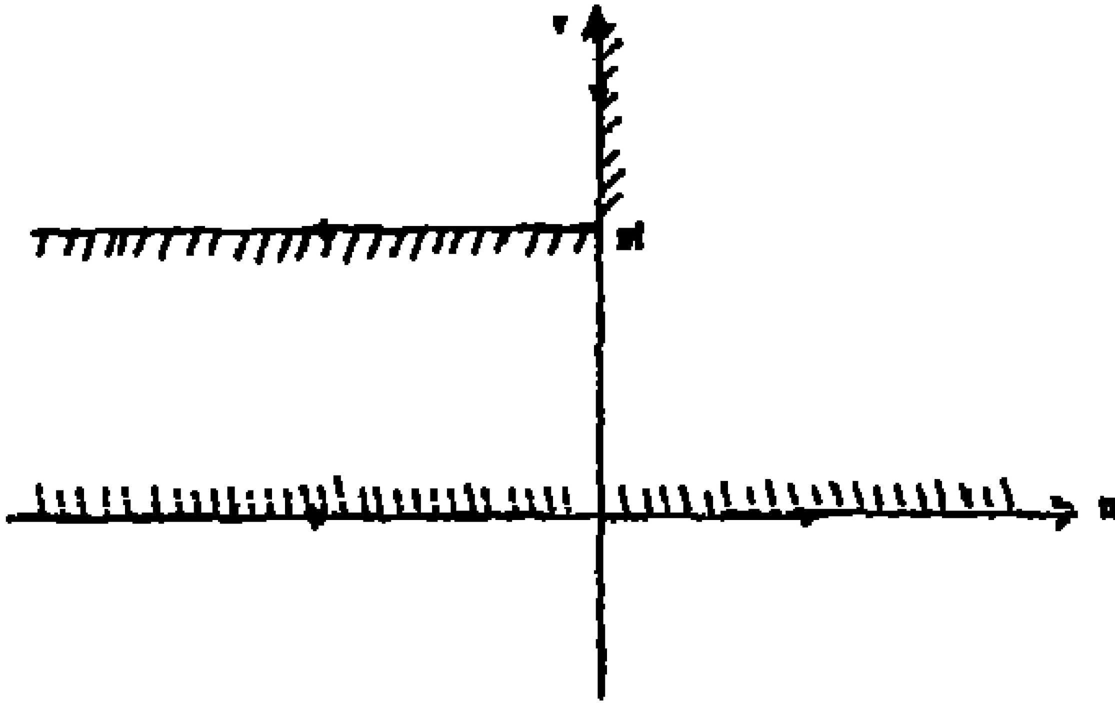


شكل (25-أ)

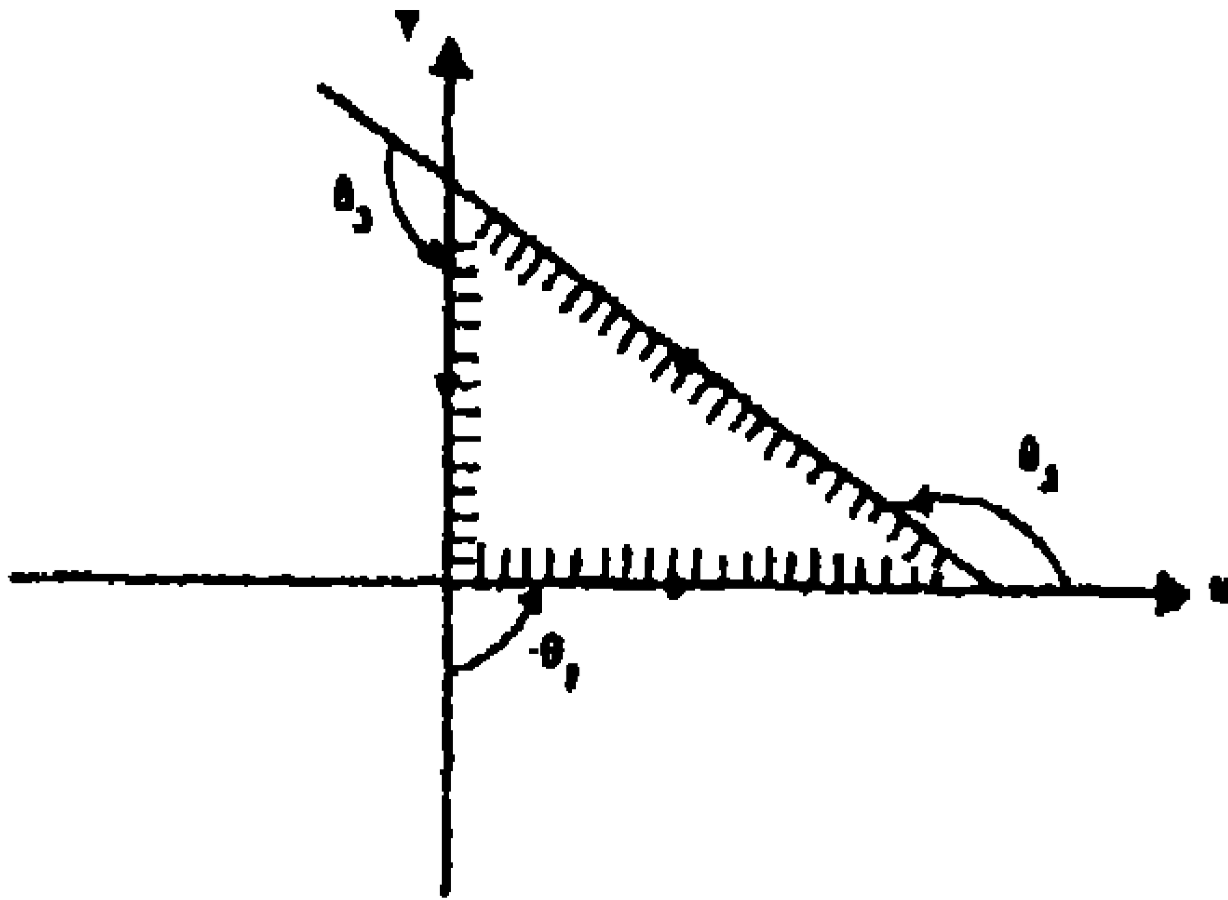
شكل (25-ب)



شكل (25-ج)



شكل (25-د)



تطبيقات

نتناول في هذا البند أنواعاً مختلفة من تطبيقات الاقترانات المطابقة والتحليلية وسيكون تناولنا وصفياً وليس تحليلياً لكثرة التطبيقات وتمشياً مع الهدف الذي وضع من أجله الكتاب وهو كونه كتاباً رياضيا. ويستطيع القارئ المهتم بالتعمق في موضوع التطبيقات الرجوع إلى العديد من المراجع التي تعالج الموضوع بالتفصيل والمذكورة في قائمة المراجع في آخر الكتاب. لذلك سنذكر نوع التطبيق ومثالاً عليه

موضحاً بالرسوم ما أمكن وسنفترض أن الشروط الفيزيائية المثالية معتمد في جميع الحالات وهي التي تحقق الشروط الحدودية أو الشروط الأولية دون أية تفصيلات لذلك.

أ - درجة الحرارة الثابتة (Steady state temperature):

إذا فرضنا أن درجة الحرارة لصفيحة تعتمد على الموضع في الصفيحة ولا تعتمد على الزمن فإن الاقتران $T(x,y)$ الذي يصف التوزيع الحراري في الصفيحة والذي يحقق الشروط الحدودية اقتران توافقي أي أنه يحقق معادلة لابلاس:

$$\nabla^2 T(x,y) = 0$$

وبالتالي فإنه يوجد اقتران تحليلي $f(z)$ بحيث إن:

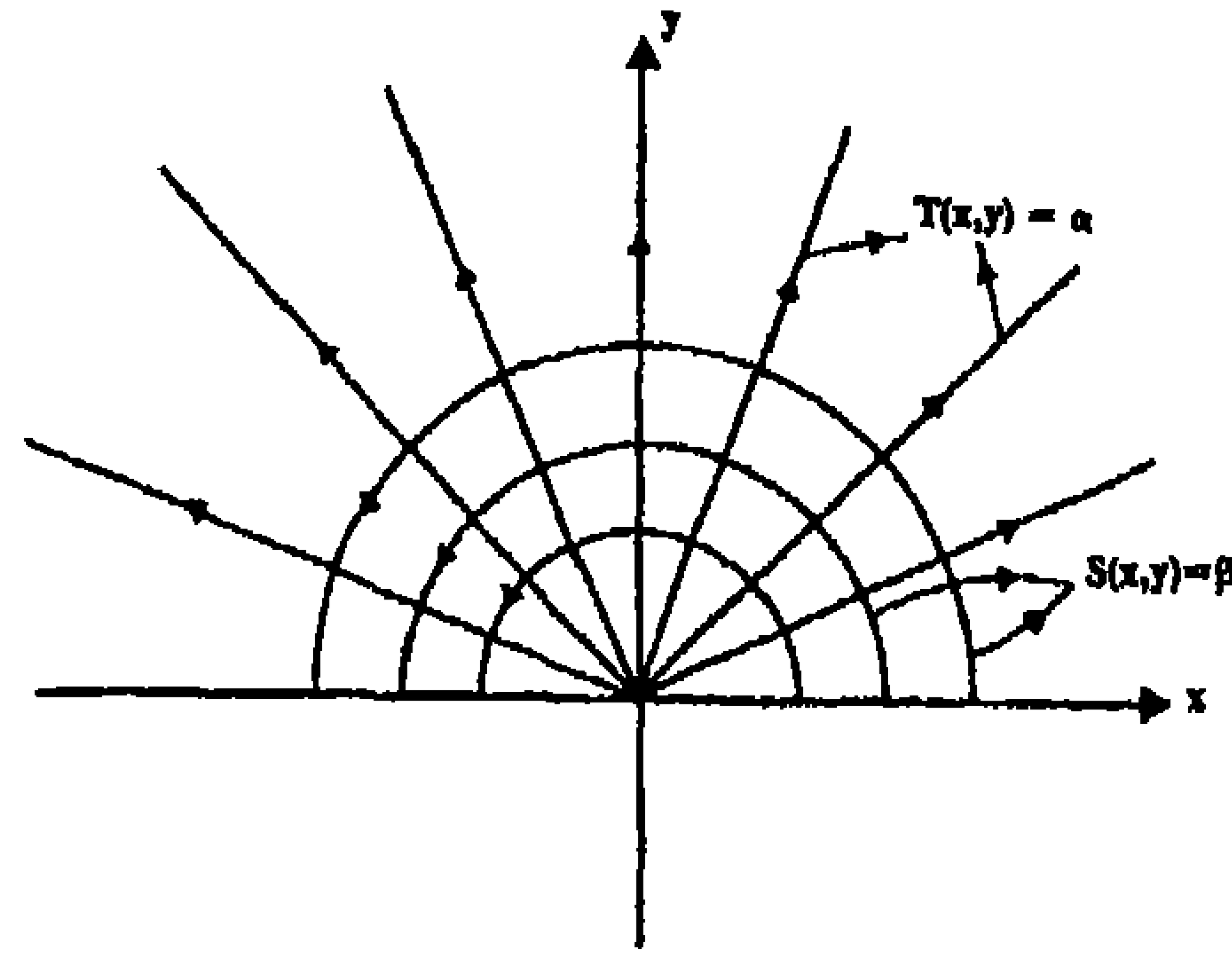
$$Re.f = T(x,y)$$

وعليه فإنه يمكن أن تفسر بأنه لأي اقتران تحليلي f فإن $Re.f$ يمثل اقتران التوزيع الحراري الثابت. لنفرض أن المرافق التوافقي للاقتران $T(x,y)$ وهو $Im.f = S(x,y)$.

فإذا فرضنا أن $T(x,y) = \alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوى التي يمثلها هذا الاقتران تسمى (Isothermal) خطوط تساوي الحرارة وكذلك إذا فرضنا أن $S(x,y) = \beta$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوى التي يمثلها هذا الاقتران تسمى خطوط تدفق الحرارة heat flow lines ومن المعروف أن منحنيات المستوى لأي اقتران توافقي ومنحنيات المستوى للاقتران المرافق التوافقي له تتقاطع تعامدياً.

مثال:

تبين لنا في تمارين 5 من الفصل الثاني أن أحد فروع Logz تحليلي في النصف العلوي للمستوى وأن منحنيات المستويات تمثل بالشكل (26).



شكل (26)

ب- الحقل الكهربائي:

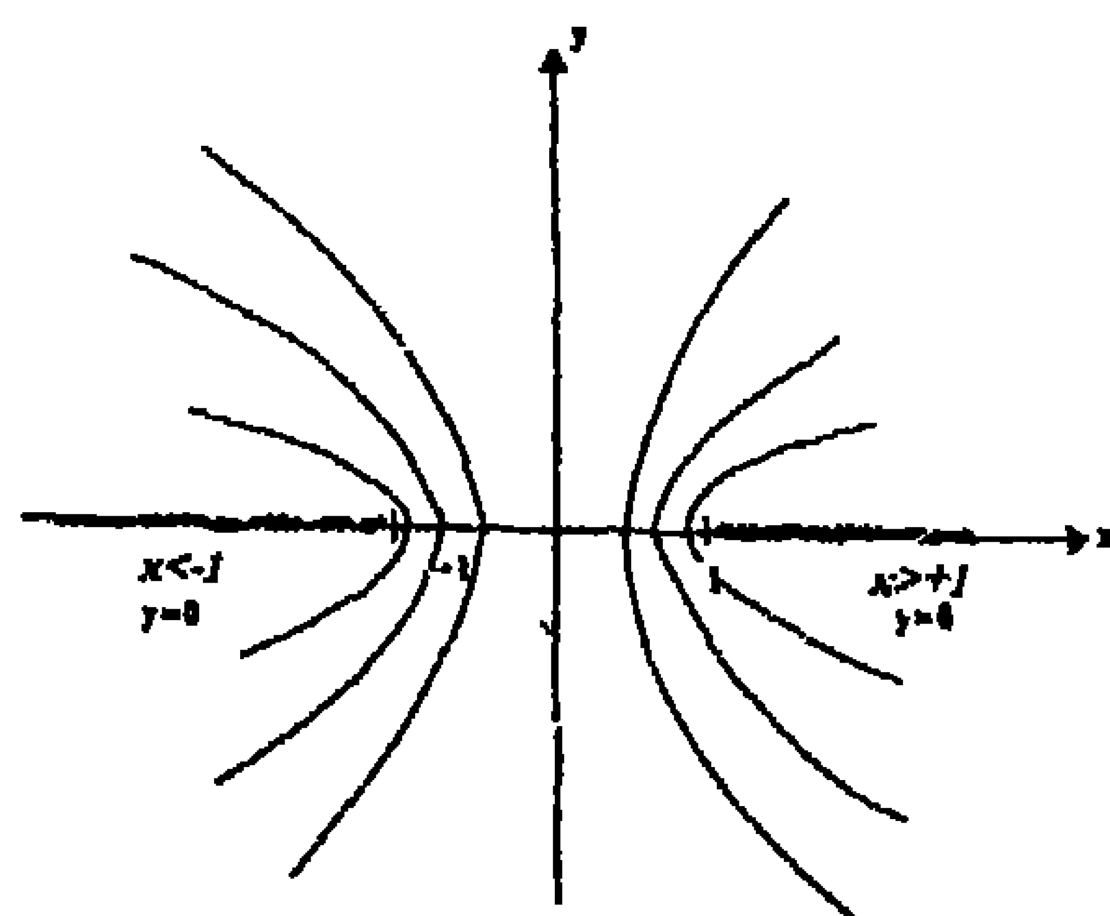
من المعروف أن الحقل الكــهربائي F(x,y (والـذي يمكـن أن يعـرف أنـه ..) وحدة الشحنة الكهربائية الموجبة عند النقطــة .. الكهربائيـة ϕ(x,y بحيـث إن (x,y) ويوجد له مرافق توافقي مثـــل S(x,y) أن منحنيـات المسـتوى ϕ(x,y)=α- وكذلـك منحنيات المستوى (x,y)=β.

مثال VII-37:

من دراستنا للاقترانات المطابقة ينقـل المسـتوى المركـب باسـتثناء الشـعاعين $\frac{-\pi}{2}<Re.w<\frac{\pi}{2}$ وبالتالي للحصول علـى اقـتران الجـهد الكـهربائي الـذي يحقـق شروطاً حدودية نأخذ الجزء الحقيقي للاقتران المطابق f وهو:

$$\phi\,(x,y) = A\ Re.\ \sin^{-1}z$$

حيث إن A ثابت توجد قيمته اعتماداً على الشروط الحدودية فإذا فرضنا أن $\phi\,(x,y) = A\ Re.\ \sin^{-1}z=\alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيـات المسـتوى الـتي تمثـل هـذا الاقتران الذي يعرف باسم خطوط تساوي الجهد تمثل الشكل (27).



شكل (27)

جـ- تدفق السو :

إذا فرضنا أن لدينا سائلاً يتدفق على المستوى المركب فإن سرعة التدفق هـذا السائل عند النقطة $z = x + yi$ هي:

$$F(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

يهمنا هنا السائل الذي يحقق الشرطين: الأول أنه متساوي الاستمرار (equicontinuity) والذي يتحقق إذا كان $\nabla . F = P_x + iQ_x = 0$

والشرط الثاني هو غير دوراني (Irrational) والذي يتحقق إذا كان

$$\nabla \times F = 0$$

ومن ذلك يكون $Qx - Py = 0$

ومن هذه الشروط يمكن أن نستنتج أن الاقتران:

$$f(z) = P + Qi$$

تحليلي فإذا فرضنا أن الاقتران $h(z)$ هو أصل المشتقة للاقتران f فإن:

$$h(z) = \phi(x,y) + S(x,y)i$$

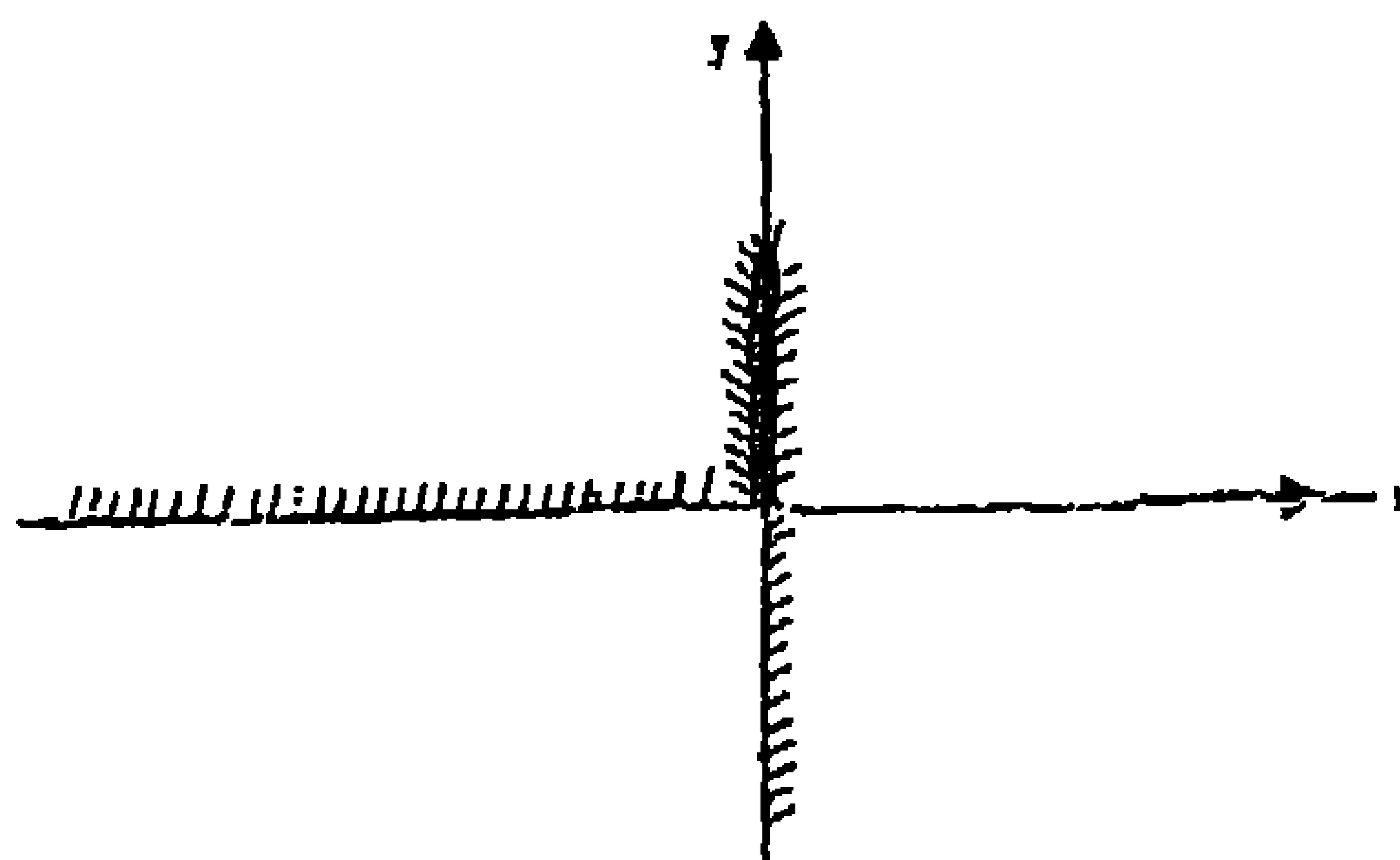
ويمكن إثبات أن $\phi(x,y)$ يمثل اقتران الجهد لتدفق السائل الذي يحقق $\nabla\phi = F(x,y)$ وبالتالي فإن $\alpha = \phi(x,y) =$ مقداراً ثابتاً يعطي خطوط تساوي الجهد وكذلك $\beta = S(x,y) =$ مقداراً ثابتاً يعطي خطوط التيار للسائل.

مثال VII-38:

يمكن إثبات أن الاقتران المطابق

$$f(z) = -\frac{1}{2} i z^{1/2} (z-3)$$

ينقل المستوى z إلى الشكل (28)

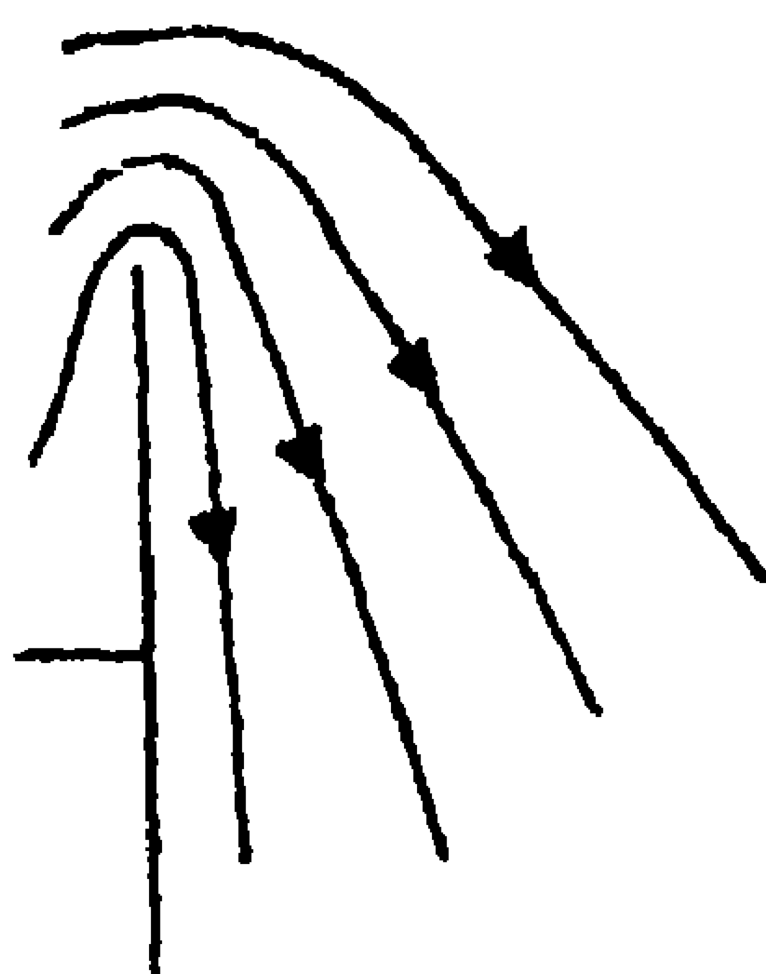


شكل (28)

فتكون منحنيات المستوى للاقتران:

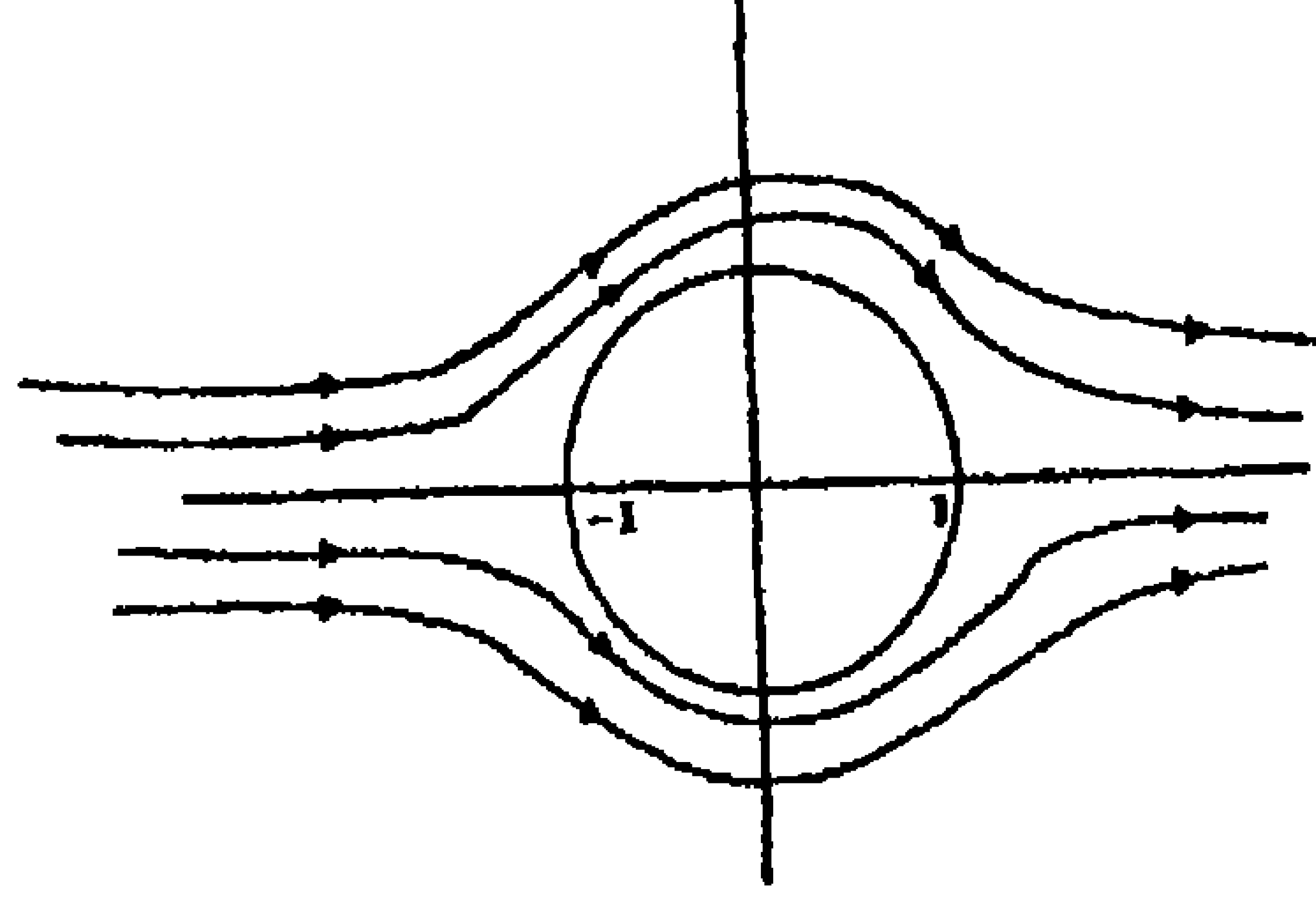
$$\phi(x,y) = A\, Re.f(z)$$

(والتي يمكن إيجادها بالطرق المعروفة حيث إن.. الشروط الحدودية) تمثل خطوط تدفق.



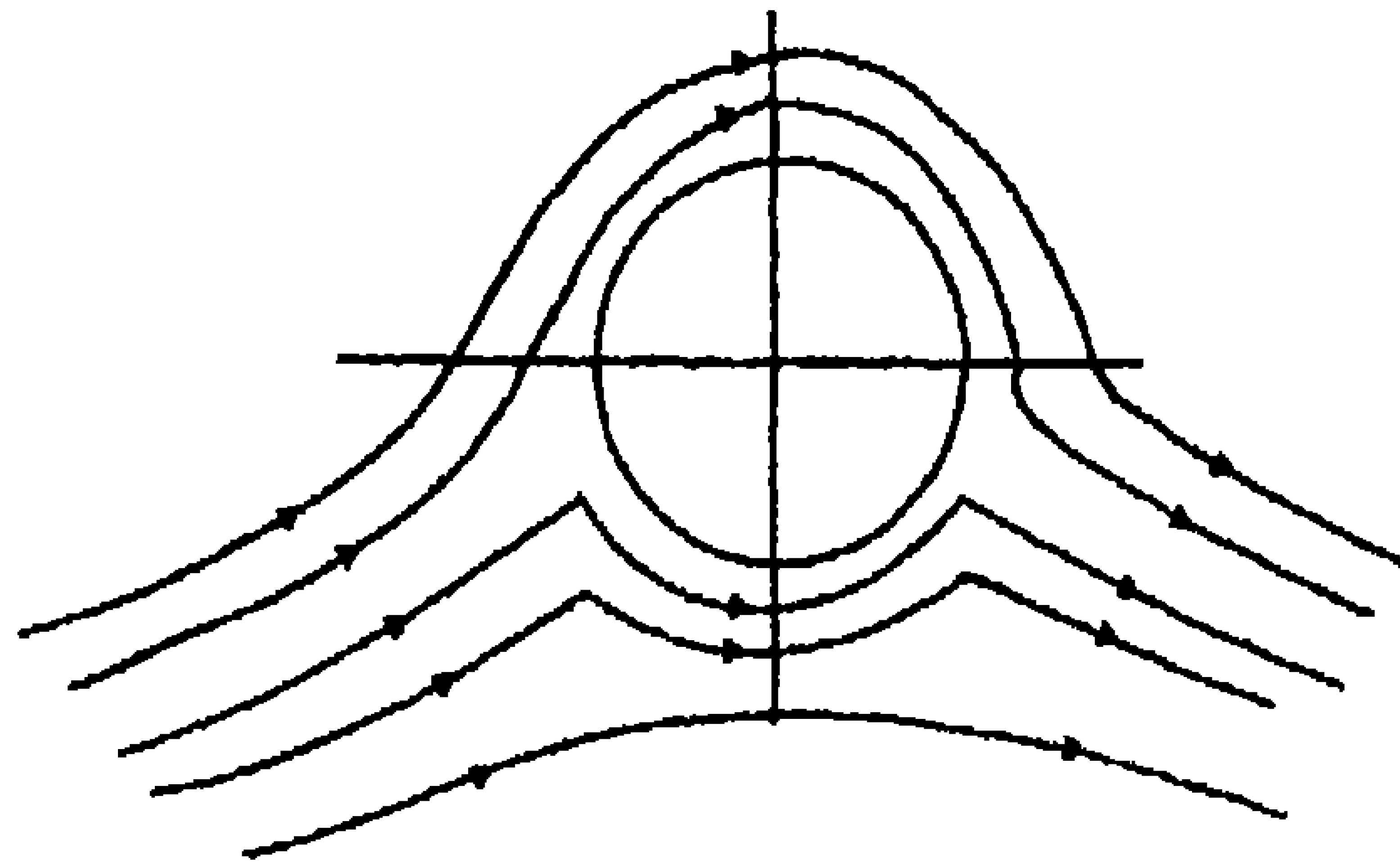
شكل (29)

والشكل يكون ممتعاً حقاً إذا تخيلنا أن ما يعيق حركة السائل جسم كروي مثلاً دائرة بدلاً من سد فإذا فرضنا أن اتجاه التدفق باتجاه المحور الحقيقي الموجب وعليه تكون خطوط التدفق كما في الشكل (30).

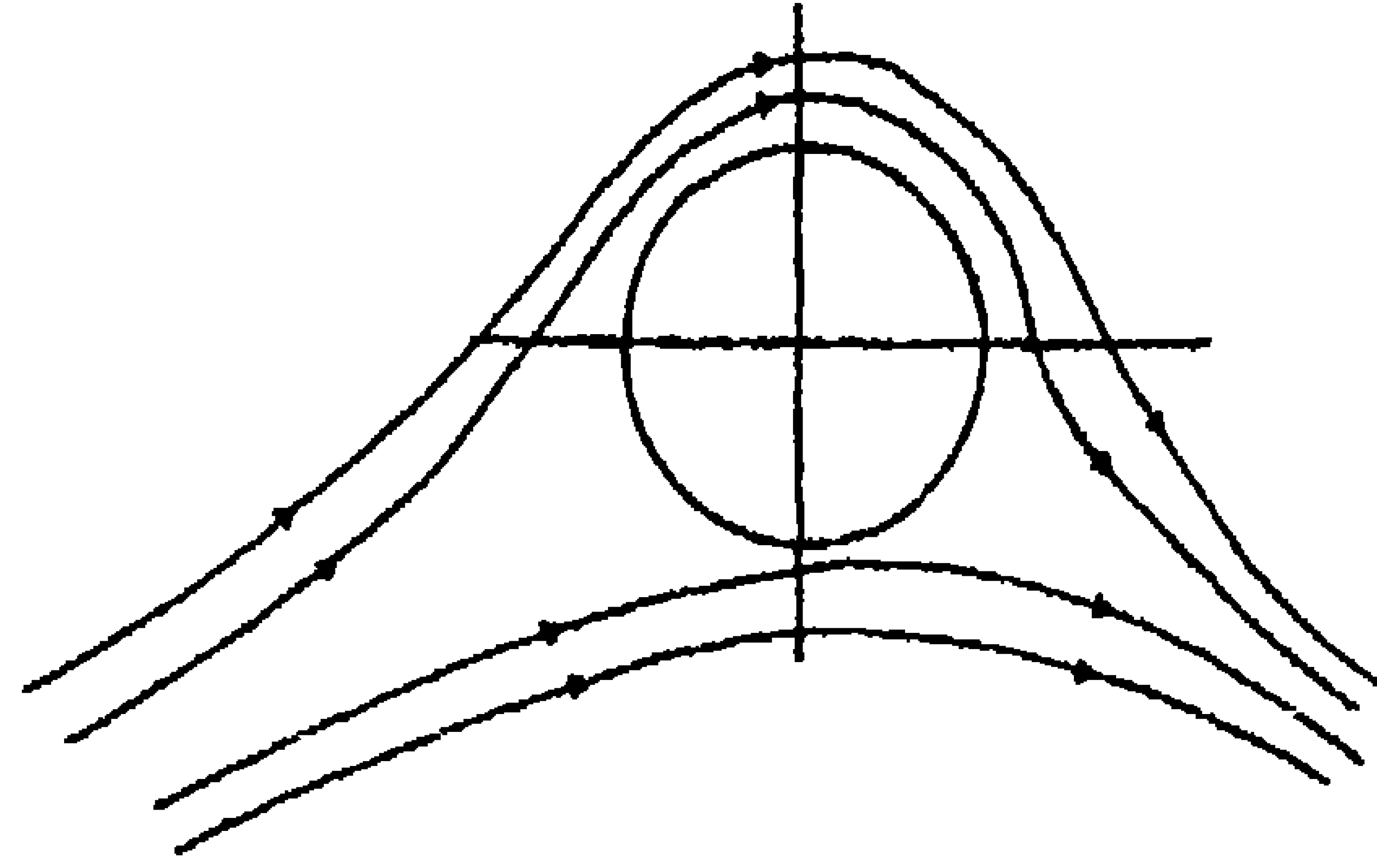


شكل (30)

أما إذا كان اتجاه تدفق السائل يميل بزاوية α على المحور الحقيقي فإن شكل خطوط التدفق تأخذ الأشكال التالية:



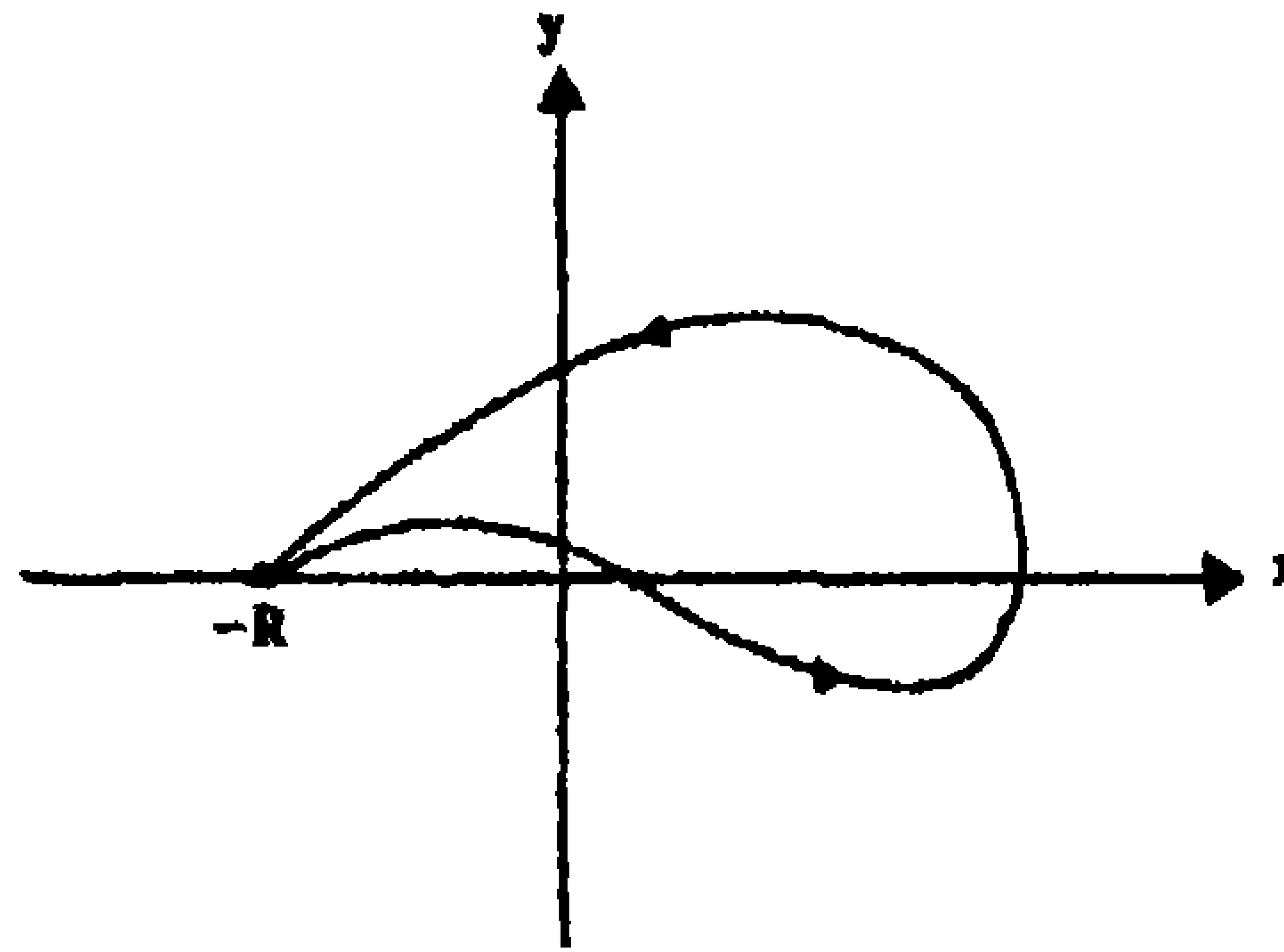
شكل (31)



شكل (32)

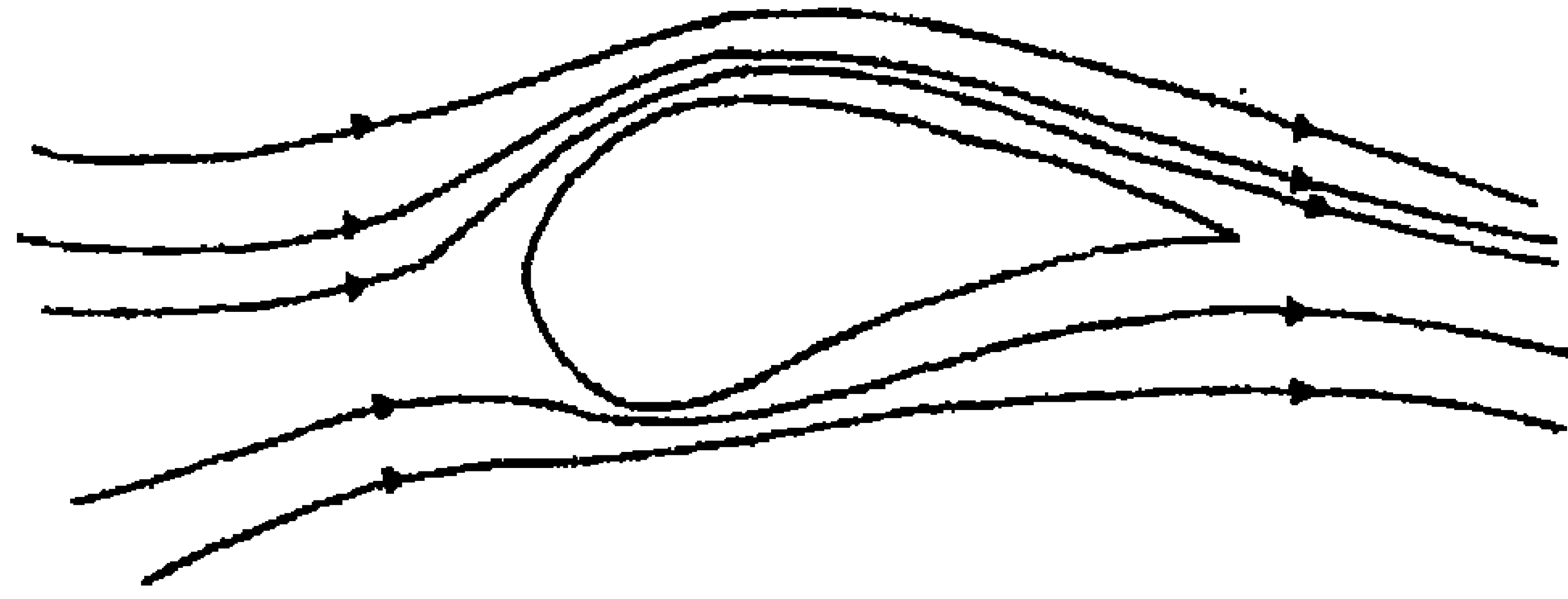
وفي جميع الحالات يمكن أن توجد معادلات للاقترانات التوافقي التي تمثل مثل خطوط التدفق هذه.

واعتماداً على نظرية تطبيق ريمان فإنه يمكن إيجاد اقتران تحليلي مطابق ينقل قرص الوحدة أعلاه إلى الشكل الذي يحده كانتور مغلق وبسيط وموجب الاتجاه مثل الشكل (33).



شكل (33)

إن مثل هذا الشكل قد يمثله نموذج جناح طائرة فتكون خطوط التدفق ممثلة لمقاومة الهواء مثلاً الشكل (34).



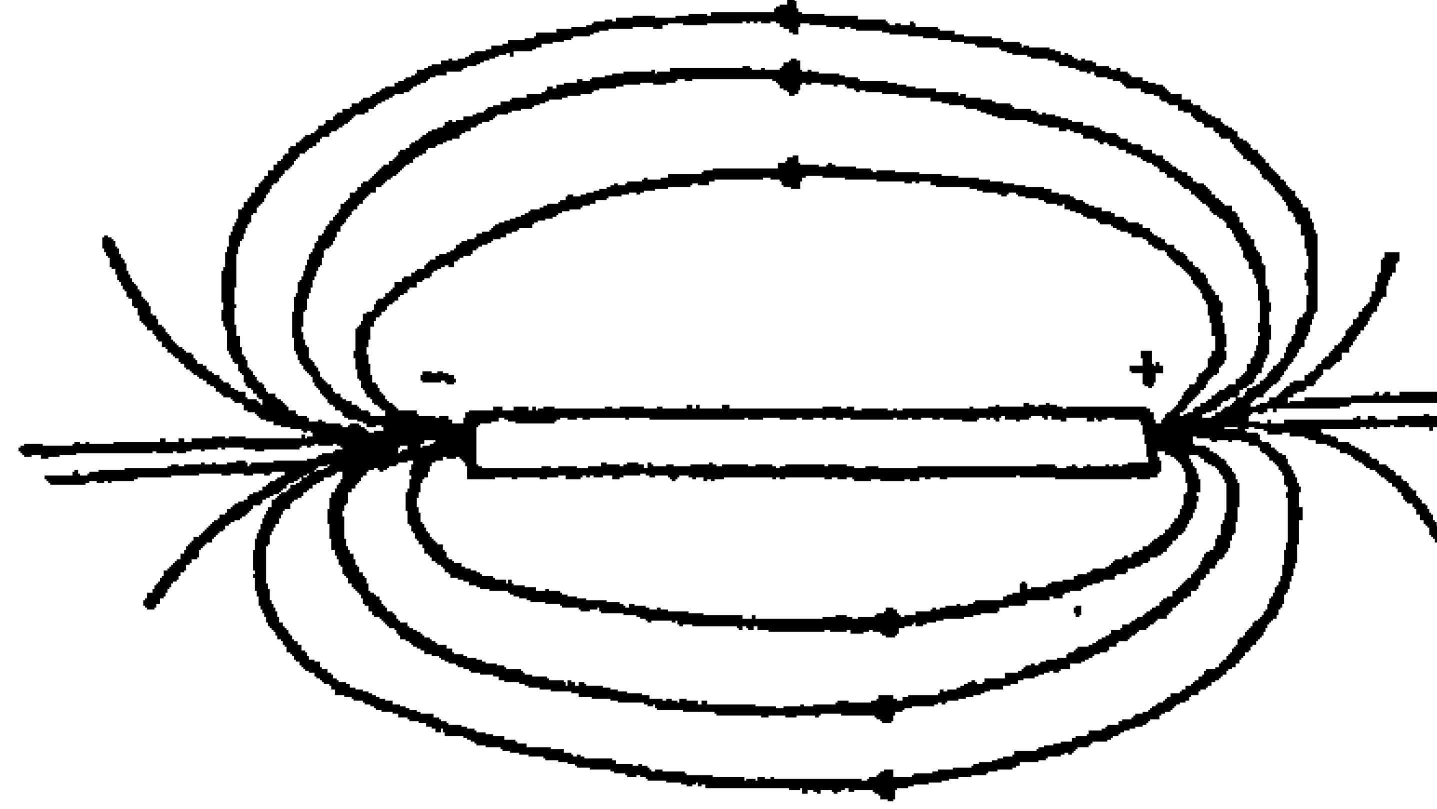
شكل (34)

وقد استطاع العالم Joakowski أن يدرس ذلك التطبيق وأثبت أنه يأخذ الشكل:

$$f(z)=z+\frac{k}{z}$$

د- النبع والصب:

من المعروف أن الحقل المغناطيسي يأخذ الشكل التالي:



شكل (35)

ويتميز بنقطة انطلاق وهي القطب الموجب ونقطة لقاء وهي القطب السالب. إن النقطة التي تنطلق منها الأشعة تسمى نبع والنقطة التي تلتقي فيها الأشعة تسمى مصب وبالتالي فإن حقل المجال المغناطيسي له نقطة نبع ونقطة مصب.

وكذلك يمكن أن يتكون أثناء حركة السائل ضمن شروط فيزيائية نموذجية (الشروط الحدودية) نقطة التقاء وهي مصب أو نقطة انطلاق وهي نبع.

مثال:

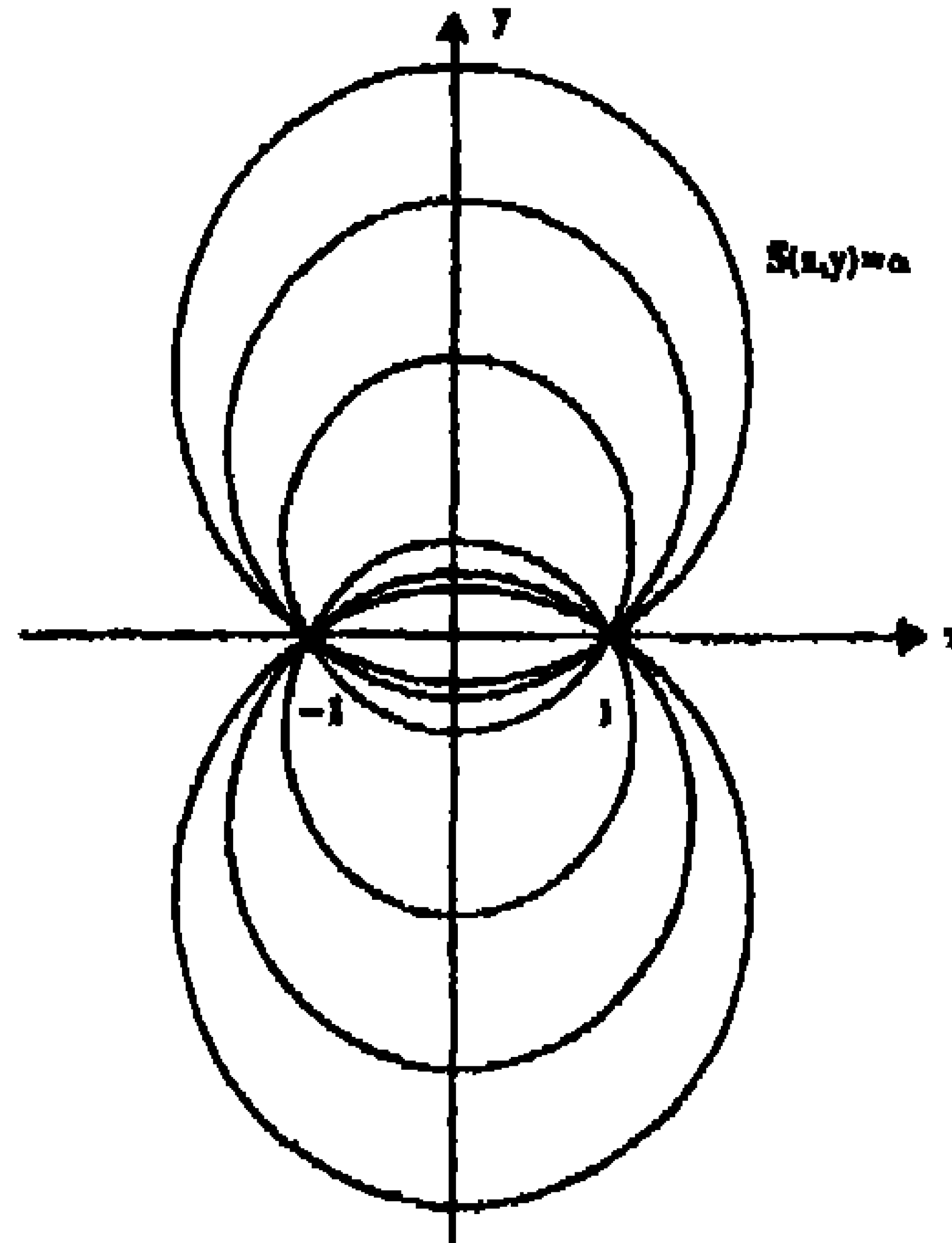
يمكن إثبات أن الاقتران f(z) حيث إن:

$$f(z)=\log\frac{z-1}{z+1}$$

اقتران مطابق عند النقاط z باستثناء النقطتين 1,1- وبدراسة اقتران الجهد وهو $\phi(x,y) = \text{Re}.f$ وكذلك اقتران التيار $S(x,y) = \text{Im}.f$ يمكن التعرف على أن النقطتين تمثلان نبع ومصب حيث إن:

$$S(x,y)=\text{Im}.f=\arg\frac{z-1}{z+1}$$

وبفرض أن $S(x,y) = \alpha$ مقداراً ثابتاً فإن خطوط التيار عبارة عن دوائر مراكزها على المحور التخيلي وجميعها تمر بالنقطتين 1+ ,- كما في الشكل (36).



شكل (36)

مثال:

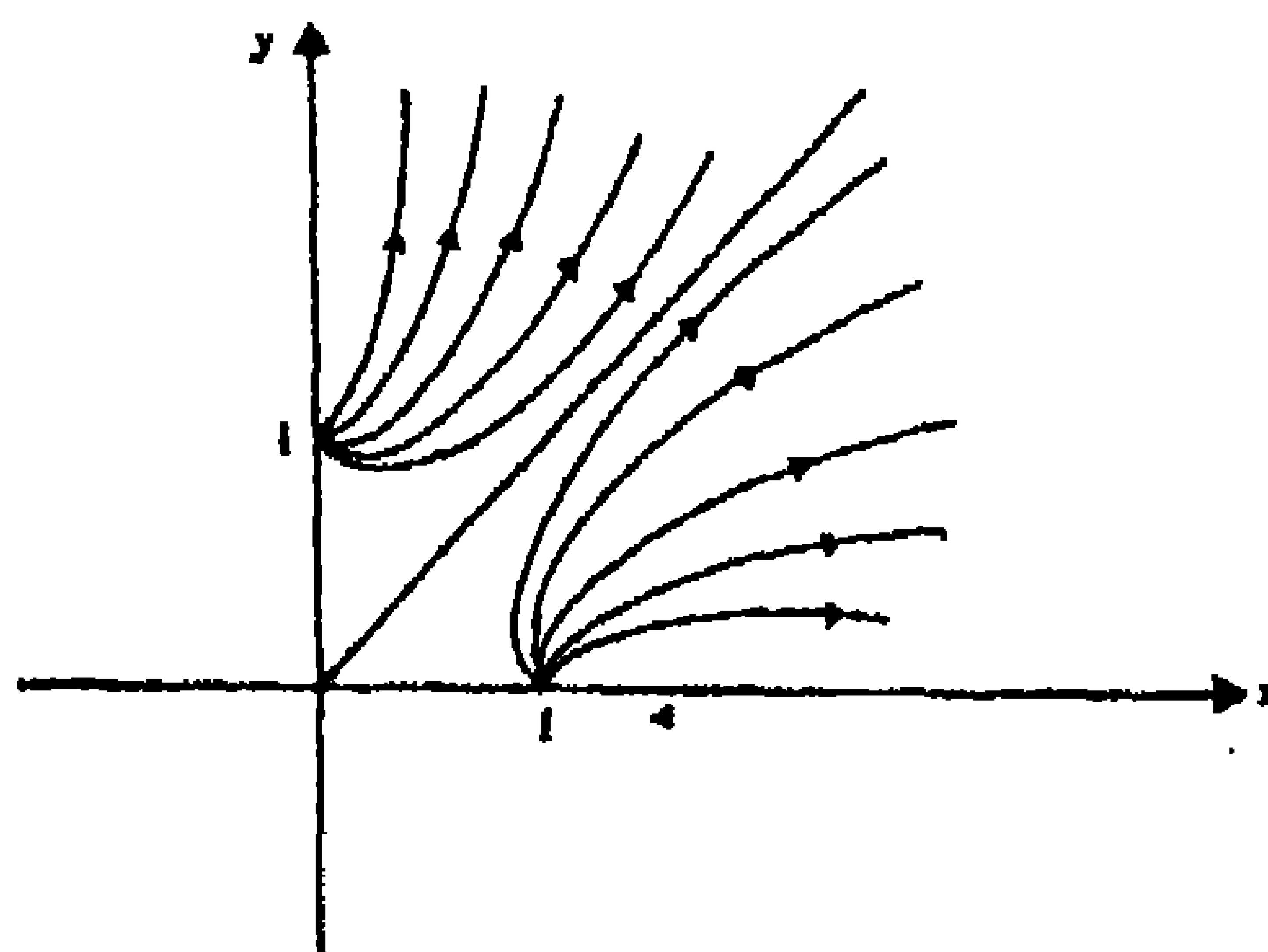
يمكن إثبات أن الاقتران التحليلي:

$$f(z) = \log(z^4-1)$$

مطابق عند جميع النقاط z ما عدا النقطتين i,1 (لأن الاقتران غير معرف عندهما) وهما تمثلان نبعين وذلك بدراسة خطوط التيار والتي تحدد بإيجاد الجزء التخيلي من الاقتران وتثبيت قيمته أي أن:

$$S(x,y) = \text{Im}.f = \arg(z^4-1) = \alpha$$

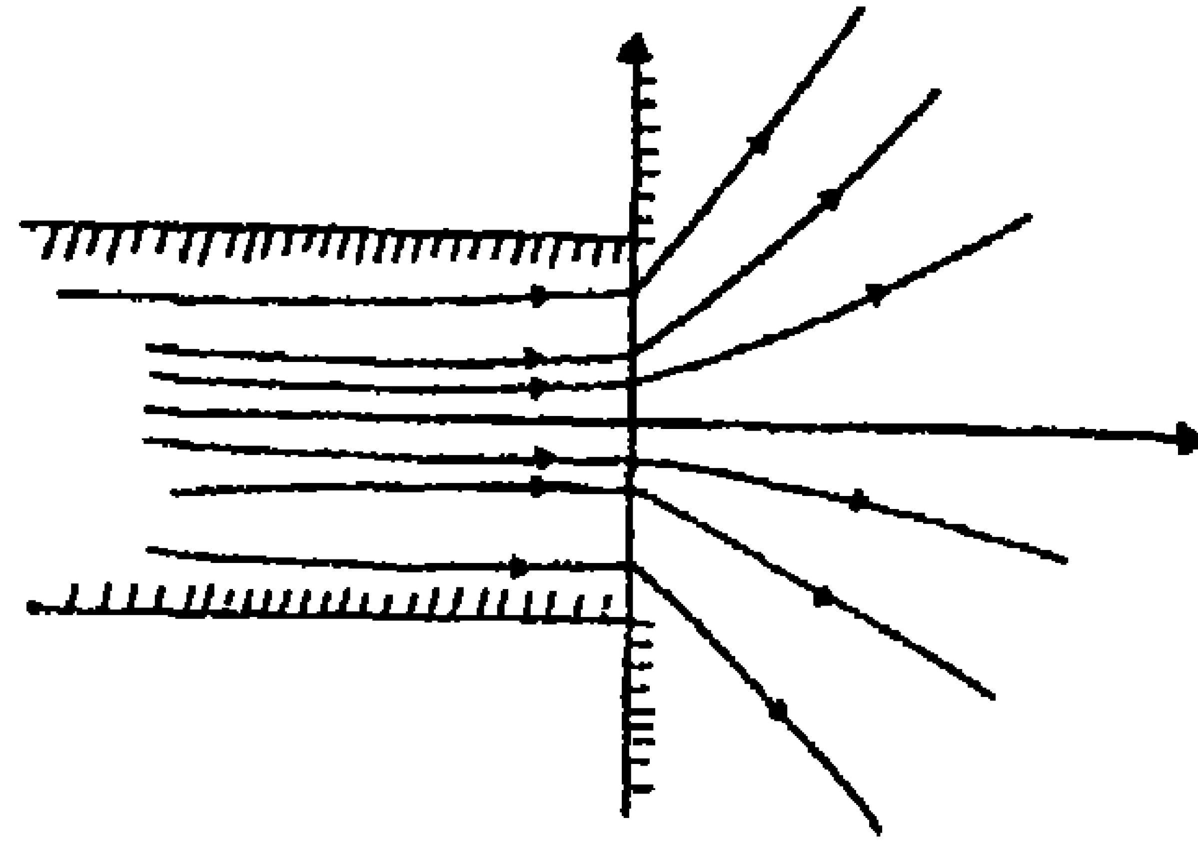
حيث α مقدار ثابت وبرسم هذه الاقتران نحصل على الشكل (37).



شكل (37)

تمارين

1- جد باستخدام شوارتز - كريستوفل الاقتران المطابق الذي يكون خطوط التدفق للجزء الحقيقي لها الشكل (38).



شكل (38)

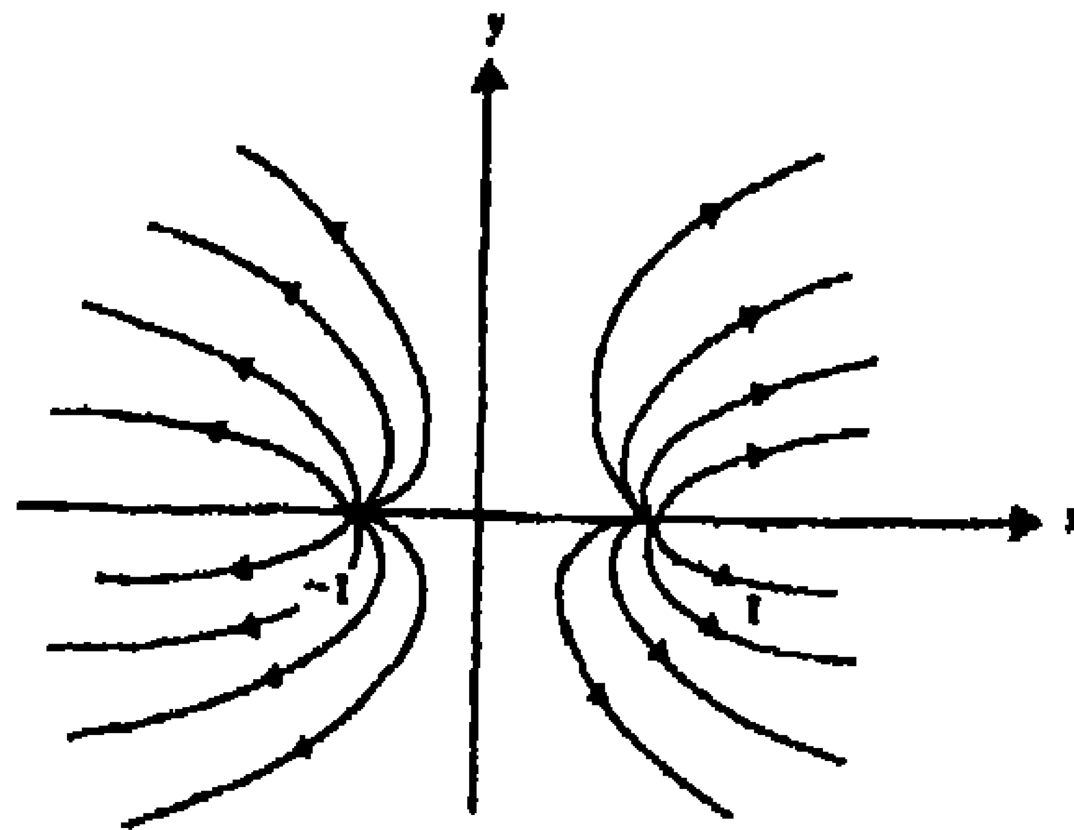
2- بين أن الاقتران: $f(z) = \log(z^2-1)$

التحليلي والمطابق عند جميع النقاط باستثناء 1,1- وهاتان النقطتان تمثلان نبعين ويكون الشكل للاقتران التوافقي.

$S(x,y) = Im.\ g$

$= \arg(z2-1) = \alpha$

كما في الشكل (39)



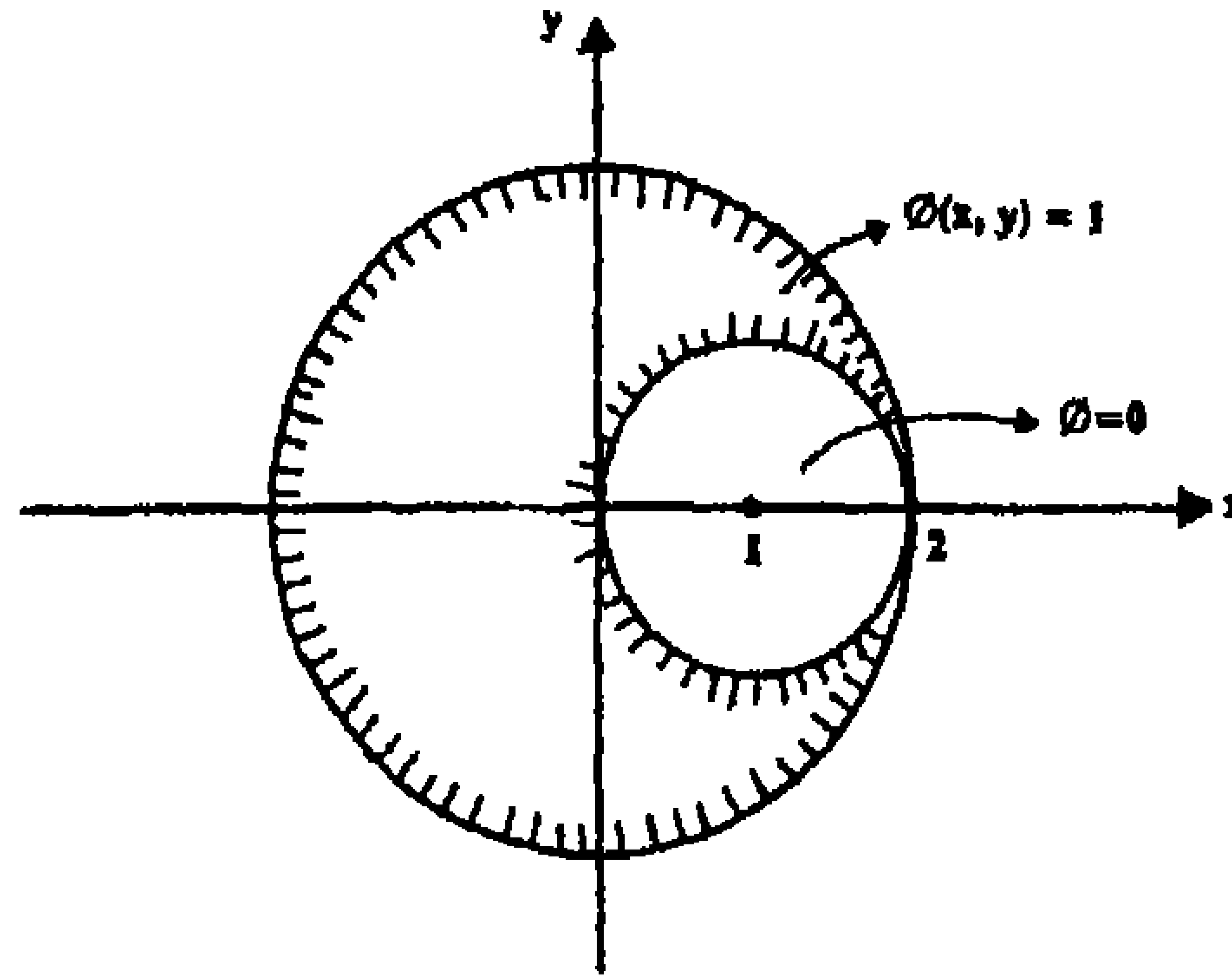
شكل (39)

3- إذا كان اقتران توزيع الجهد الكهربائي في المنطقة الهلالية معرف بالمعادلة

$\phi(x,y) = A. Re . f(z)$

حيث A ثابت يعتمد على الشروط الحدودية الموضحة في الشكل (40).

جد f(z) ثم جد $\phi(z,y)$



شكل (40)

اقتراح : جد اقتران مزدوج الخطية ينقل المنطقة الهلالية إلى شريحة مثلاص.

4- جد اقترانا توافقياً $\phi(x,y)$ ينقـل المنطقـة المظللـة في الشـكل (41-أ) إلى المنقطـة المظللة في الشكل (41-ب) ويحقق الشروط المذكورة على الشكل (41).

اقتراح: تذكر أن الاقتران.

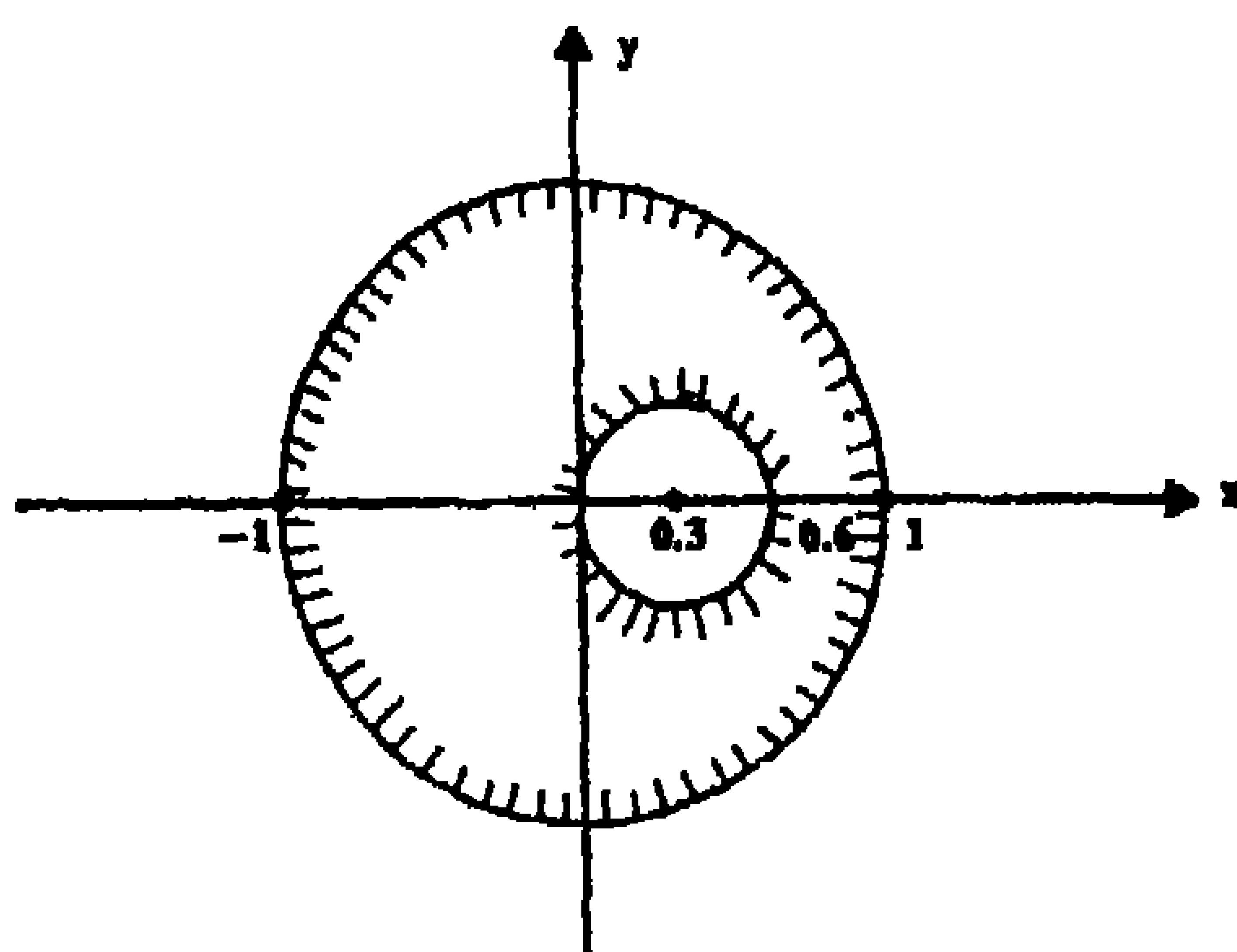
$$f(z)=\frac{\lambda-z}{\lambda z-1}, \quad |\lambda|<1$$

ينقل قرص الوحدة إلى نفسه وبالاستفادة من الشروط

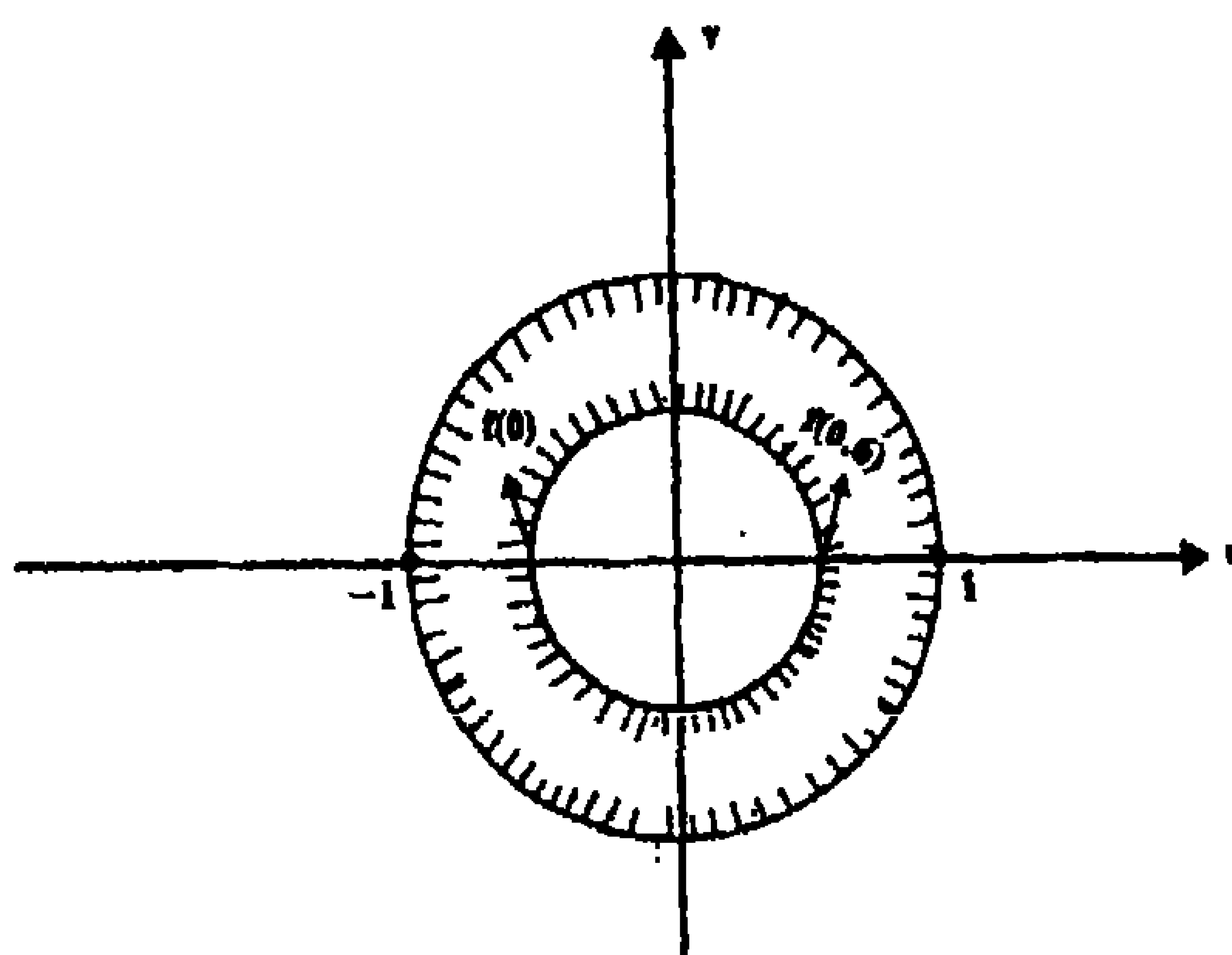
$f(0) = -f(0.6)$

يمكن إيجاد قيمة $\lambda=3,\frac{1}{3}$ وبالتالي تحدد f(z) تماماً ثم جد $\phi(x,y)$ حيث:

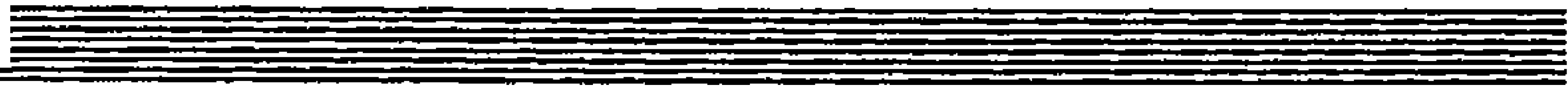
$$\phi(x,y) = R.f(z) = Re.\left(\frac{1-3z}{z-3}\right)$$



شكل (41-أ)



شكل (41-ب)





الفصل الرابع

المنطق، المجموعات، البنى الجبرية

الفصل الرابع

المنطق، المجموعات، البنى الجبرية

1- المنطق:

للمنطق أهمية في موضع التحليل لا تقل عن أهميته في مواضيع الرياضيات الأخرى. ولكن لا مجال لأن نعرض بالتفصيل جميع الأفكار المنطقية التي قد نحتاج إليها في هذا الكتاب ولكن سوف نحاول عرض بعض الأفكار التي تستخدم عادة في براهين نظريات في التحليل، وتوضيحها بأمثلة مبسطة.

ولكي نتمكن من إعطاء أمثلة ذات أهمية سنفترض أن القارئ ملــم بمبادئ المجموعات المذكورة أدناه. وهذه المجموعات تتخلل علم الرياضيات بأكمله، وسوف نستعرضها بالتفصيل في فصول متقدمة.

سوف نستعمل الرموز R, Q, Z,N , ϕ لتشير إلى المجموعات التالية:

N = { 1،2،3،4، ....} مجموعة الأعداد الطبيعية.

Z = {0،1،-1،2، -2، .... } مجموعة الأعداد الصحيحة.

Q = {أ/ ب| أ ∍ z، ب ∍ N} مجموعة الأعداد النسبية،

R ، مجموعة الأعداد الحقيقية.

ϕ، مجموعة الأعداد المركبة.

بالنسبة للمجموعة Q فإن الخط الرأسي بعد أ/ ب يقرأ "حيث" و "∍" يقرأ "ينتمي إلى" أو "عنصر في". وتسمى N أيضاً مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. و"Zahlen" هي كلمة ألمانية تعني "أعداد صحيحة" ولهذا أستخدم الحرف z للإشارة إلى مجموعة هذه الأعداد.

والأعداد النسبية تدعى أيضاً باللغة الإنجليزية "Quotients" ولهذا أستخدم الحرف Q للإشارة إليها. أما الحرف R فمن كلمة "Real" (حقيقي) وحرف ϕ من كلمة "Complex" (مركب).

ومعظم الرياضيين يستعملون هذه الرموز، والذين لا يستخدمونها ربما كان عليهم أن يستخدموها، ولكن لنكن متسامحين.

جاوس نفسه قال مرة: تعني الرياضيات بالأفكار وليس بالرموز.

ومن الأفكار الرئيسية في المنطق فكرة "القضية": نعرف القضية بأنها عبارة خبرية ذات معنى يمكن أن يكون صواباً أو خطأ ولكن لا يمكن أن يكون صواباً وخطأ في آن واحد.

وفيما يلي مثال لقضيتين

السماء تمطر ..... (1)

الشوارع مبللة.....(2)

ومن مثل هاتين العبارتين البسيطتين نستطيع تكوين عبارات أخرى باستخدام كلمات وأحرف مثل "وَ" ، "ليس" ، "أو" ... الخ.

مثال:

السماء تمطر والشوارع مبللة.

ونستعمل غالباً الأحرف ف،ن، ولتشير إلى القضايا.

وأهم العبارات التي يمكن تكوينها من العبارتين ف، ن هي:

النفي: ليس ف، ورمزها ~ ف.

الوصل: ف وَ ن، ورمزها ف $\wedge$ ن.

الفصل: ف أو ن، ورمزها ف $\vee$ ن

التضمين: ف تتضمن ن، ورمزها ف $\rightarrow$ ن.

التكافؤ: ف إذا وفقط إذا ن، ورمزها ف $\leftrightarrow$ ن.

والرمز ↔ن هو حسب التعريف (ف ← ن) ∧ (ن ← ف)

أن ف إذا وفقط إذا ن تعني أن ف تتضمن ن وكذلك ن تتضمن ف.

وهنالك طريقتان أخريان نعبر بهما عن ف ↔ ن.

أ) ف تكافئ ن.

ب) ف شرط ضروري وكافٍ لتحقيق ن.

وهذه طرق أخرى شائعة لقولنا "ف تتضمن ن".

أ) إذا كان ف فإن ن.

ب) ف فقط إذا ن.

جـ) ف شرط كافٍ لتحقيق ن.

د) ن شرط ضروري لتحقيق ف.

المثال (1):

لتكن ف رمزاً للعبارة (1) أعلاه، ن رمزاً للعبارة (2)، فيكون:

~ ن، ف ∧ن ، ف↔ن تعني على الترتيب: الشوارع ليست مبللة، السماء تمطر والشوارع مبللة، السماء تمطر إذا وفقط إذا كانت الشوارع مبللة.

إننا هنا لا نتحدث عن صواب أو خطأ العبارات الواردة في مثال 1، وإنما نوضح معنى الرموز فقط.

ونطمئن القارئ أن التحليل الرياضي لا يهتم كثيراً ببلل الشوارع، والسبب الوحيد لذكر عبارات كتلك الواردة في المثال 1 هو أنه أبسط الأمثلة التي توضح الأفكار الرئيسية دون استخدام الرياضيات.

ومن تعريفنا للعبارة ف، يجب أن يكون بالإمكان وصفها بكلمة صواب أو خطأ. لذلك سنستعمل الحرف ص والحرف خ لنشير إلى قيمة الصواب في العبارة.

ونعتبر جدول الصواب التالي تعريفاً لقيم صواب العبارات المذكورة:

ف	ن	ف∧ن	ف∨ ن	~ف	ف ←ن
ص	ص	ص	ص	خ	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	خ	ص	ص

المثال (2):

باستخدام الجدول (3) يكون جدول الصواب للعبارة (~ف) ∨ ن هو:

ف	~ف	ن	(~ف)∨ ن
ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص

لاحظ أن جدول الصواب ل (~ف) ∨ ن هو نفس جدول الصواب ل ف←ن بمعنى أن لهاتين العبارتين نفس العمودين الأخيرين. في هذه الحالة نقول أن العبارتين (~ف) ∨ ن، ف ← ن متكافئتان منطقيا.

ومن الممكن أن نعلل إعطاء قيم الصواب المذكورة في (3)، لكن تعليل إعطاء قيم صواب لعبارة التضمين (الشرط) غير مقنع. فمن الأفضل اتخاذ جدول الصواب بمثابة تعريف لها، مقبول في كل مكان.

ومن المهم أن نذكر أن العبارة التي قيم صوابها دائما ص تدعى تحصيل حاصل. أما العبارة التي قيم صوابها خ فإنها تدعى تناقضا.

المثال (3):

باستخدام (3) فإن جدول صواب ف ∨ (~ف) هو:

ف	~ف	(~ف)∨ ن
ص	خ	ص
خ	ص	ص

لذلك فإن ف ∨ (~ف) هي تحصيل حاصل.

وبالمثل نرى أن ف∧ (~ف) هي تناقض.

إليك مثالاً أقل وضوحاً من هذا، وأن يكن سهلاً: أنه كتابة جدول الصواب لإثبات أن : (5) .... [(ف←ن) ∧ (ن ←ر)] ← (ف←ر)

هي أيضاً تحصيل حاصل. تدعى العبارة (5) قانون القياس المنطقي ونستخدمه دائماً في الرياضيات، وهو إذا عبرنا عنه بالكلمات يبدو من الوضوح بحيث أن معظم الناس يستخدمونه وهم لا يعملون.

طرق البرهان:

هناك ثلاث طرق رئيسية للبرهان نجدها في التحليل.

ب$_1$: البرهان المباشر.

ب$_2$: برهان المعاكس الايجابي.

ب$_3$: البرهان بالتناقض.

المقصود بـ ب1 انه إذا أردنا إثبات ف ← ن نبدأ بالعبارة ف ثم نتوصل إلى استنتاجات معتمدين على معرفتنا بالوضع حتى نتوصل إلى ن.

المثال (4):

لنبرهن باستخدام البرهان المباشر على أنه إذا كان ن عدداً طبيعياً زوجياً فإن ن^2 هو عدد زوجي.

ن عدد زوجي ← ن = 2أ حيث أ عدد طبيعي.

← ن^2 = 4أ^2 = 2(2أ^2)

← ن^2 عدد زوجي.

لا شيء أبسط من هذا، وبشكل عام يكون البرهان المباشر هو البرهان الطبيعي.

ولكن لسوء الحظ فإن معظم النظريات الهامة في التحليل لا يمكن إثباتها بطريقة مباشرة. وعلينا استخدام الطرق غير المباشرة ب$_2$، ب$_3$.

نذكر الآن التعاريف التالية:

برهان المعاكس الإيجابي:

هو برهان بدل نثبت فيه أن ف ←ن (وهو ما نريد إثباته) فإننا نثبت أن ~ن ← ~ف. تدعى العبارة ~ن ← ~ف المعاكس الايجابي للعبارة ف ← ن.

البرهان بالتناقض:

في هذا البرهان، بدل أن نثبت أن ف←ن (وهو ما نريد إثباته) فإننا نثبت أن ف ∧ (~ن) ← أي عبارة خاطئة ر.

لابد أن هذين البرهانين يبدوان غريبين بالنسبة للمبتدئ، ولكن معظم كتب التحليل تستخدمهما كثيراً، وعادة دون ذكر ذلك. وتبين النظرية التالية صحة استعمال ب$_2$،ب$_3$ حيث تثبت أن كلاً منهما مكافئ منطقياً للبرهان المباشر ف←ن.

النظرية (1):

أ) ~ن ← ف تكافئ منطقياً ف ← ن.

ب) لنفرض أن ر هي أي عبارة خاطئة فإن ف∧ (~ن) ← ر تكافئ منطقياً ف←ن.

البرهان: علينا أن تبين أن جدولي الصواب للعبارتين ~ن ← ~ف وف ∧(~ن) ← ر هما نفس جدول الصواب للعبارة ف ← ن.

باستخدام التعريف 3 نجد أن:

ف	ن	~ن	~ف	~ن ← ~ف	ف∧(~ن)	ر	ف∧(~ن)← ر
ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص
ص	خ	ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	خ	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ	ص

فالعمودان الخامس والثامن من هذا الجدول هما نفس العمود الأخير في جدول 3. وهذا يثبت النظرية.

المثال (5):

سنستخدم المعاكس الايجابي لإثبات أنه إذا كان م عدداً طبيعياً فإن م^2 زوجي تتضمن م زوجي (ولنقل ف ← ن).

لاحظ أننا أثبتنا أن ن ← ف في المثال 4أ. وبالطبع أن العبارة ن ← ف تختلف عن العبارة ف←ن. وليحذر الطالب كل الحذر أن يظن أنه إذا كانت ن ←ف فإن ف←ن. الآن (~ن) تعني أن م ليست عدداً زوجياً أي أنها عدد فردي. إذن م = 2أ–1، حيث أ عدد طبيعي، ومنه نستنتج أن م^2= 2أ (2أ–2) + 1 ، إذن م^2 عدد فردي، ومنه م^2 عدد غير زوجي (وهي ~ ف). لقد أثبتنا أن ~ن ← ~ف. وباستخدام النظرية 1–(أ) نجد أن ف ← ن.

المثال (6):

في النظرية 7 الهامة والواردة في الفصل السادس نستخدم البرهان بالتناقض. في تلك النظرية علينا أن نثبت أن الاتصال على مجموعة معينة (لنقل ف) تتضمن الحصر (لنقل ن). لا حاجة لك هنا بمعرفة هذه الكلمات فما يهمنا هو فقط تركيب البرهان.

في الحقيقة فإننا نثبت في النظرية 7 أن:

ف ∧ (~ن) ← ر ، حيث ر هي العبارة الخاطئة 1 ? 0.

وفكرة البرهان هي كما يلي: إذا كانت هناك خاصية الاتصال دون الحصر أمكننا أن نستنتج أن 1 ? 0. وهذا يثبت أن الاتصال يتضمن الحصر.

السور الكلي والسور الجزئي:

هذان اسمان في المنطق يبدوان مخيفين إلا أنهما شيئان بسيطان ومفيدان. فالرمز ∀ يقرأ "لكل" ويسمى السور الكلي والرمز E يقرأ "يوجد" ويسمى السور الجزئي.

ولن نستخدم هذين الرمزين في غير هذا البند لأننا نفضل استخدام الكلمات التي تؤدي معناهما. ولكن قد يواجه الطالب هذه الرموز عند دراسته المنطق والرياضيات.

المثال (7):

يمكننا أن نؤكد أن العبارات التالية صائبة.

أ) ∀ س ∍R، س^2 ≥

ب) E ص ∍ R| ص^4 = 16

في أ) نعبر عن نظرية عامة لجميع الأعداد الحقيقية، وفي ب) نلاحظ أن ص = 2 تحقق الشرط، وكذلك ص =-2. وعندما نقول "يوجد" نعني بالضبط أنه "يوجد على الأقل واحد".

جـ) ∀ س ∍ R، س^2 > 0 خاطئة لأن س=0 لا تحقق س^2 > 0 .

أنه لأمر هام جداً أن يدرك الطالب الفرق بين السورين "لكـل" و "يوجـد" وأ لا يستبدل أحدهما بالآخر في البراهين أو التعاريف.

وقد يلزم نفي عبارة تحتوي علـى ∀ و E. والقـاعدة العامـة أنـه عنـد نفـي عبـارة تحتوي علـى ∀ و E فإننـا نسـتبدل ∀ ب E و E ب ∀، ثـم نقـوم بنفـي أي عبـارة تتبـع السورين.

مثالاً على ذلك، نفي E أ، Eب، ∀ جـ بحيث أن ف (أ،ب،ج،) هــو ∀ أ، ∀ ب، E جـ بحيث أن ~ ف (أ،ب،جـ).

المثال (8):

فيما يلي تعريف لقولنا أن المتتالية (س ن) تقترب من الصفر (أنظر الفصل 2).

(6)................ ∀∈>0 ، Eن. تحقق |س ن|<∈ ، ∀ ن>ن,ن.

في هذا التعريف نسـتعمل الحـرف الإغريقـي ∈ (ابسـلون) ليشـير إلى عـدد موجب. ويجب أن لا يخلط بينه وبين ∍ الذي يعني "ينتمي إلى".

نفي (6): أي أن (س ن) لا تقترب من الصفر هو:

(7)............... E∈> 0 ، ∀ ن. ، Eن>ن. تحقق.|س ن| ≤,∈.

وبالكلمات فإن (7) تقول: يوجد عدد موجب ∈ حيث أنه لكـل ن. يوجـد ن> ن. يحقق |س ن| ≤ ∈ .

تمارين (1-1)

(تجد في نهاية الكتاب إرشادات لحل بعض هذه التمارين).

1- أكتب جدول الصواب لِ ف ↔ن.

2- أذكر أي العبارات التالية تحصيل حاصل أو تناقض أو غير ذلك:

أ) ف ← (ف ∨ ن)

ب) ف ← ~ف

جـ) [ف ∧ (ف←ن)] ← ن

د) (~ ف ←ف) (ف← ∧~ف).

3- استخدم جدول الصواب لإثبات أن قانون القياس المنطقي هو تحصيل حاصل.

4- استخدم جداول الصواب لإثبات التكافؤ المنطقي ت لكل من:

أ) ~ (ف∧ن) ت (~ف) ∨(~ن)

ب) ~(ف∨ن) ت (~ف) ∧(~ن)

جـ) ~(ف ↔ ن) ت (ف↔ (~ن)

د) ف∧ (ن∨ر) ت (ف∧ن) ∧ (ف∧ر)

5- إذا تفادى فريق الإصابات الجسدية سيفوز بالبطولة. تفادى الفريق الإصافبات أو الحكم متحيز. إذا كان الحكم متحيزاً يثور الجهور لكن الجمهور هادئ.

إذا علمت أن كل هذا العبارات صائبة، فهل سيفوز فريق بالبطولة؟

6- لنفرض أن س ∈ R ولنفرض أن ف نرمز إلى س =1 ون إلى س^2 =1، بين صواب أو خطأ ما يلي:

أ) ف ←ن

ب) ن ←ف

7- أكتب كلاً من العبارات التالية على شكل ف←ن أو ف ↔ ن. في كل حالة بين صواب العبارة أو خطأهما:

أ) يكون 3س^2 +4=7 إذا كانت س =1 حيث س ∍ R.

ب) س=1 شرط ضروري وكافٍ لتحقيق 3س^2+4=7 حيث س ∍ R.

جـ) كل عدد صحيح أكبر من 2 يكون عدداً أولياً فقط إذا كان فردياً.

د) إذا كان العدد الصحيح من مضاعفات 4، فذلك شرط كاف لأن يكون هذا العدد زوجياً.

هـ) ع ∍ ϕ و ع=1 إذا وفقط إذا كان ع ∍ ϕ وع^3=1.

8- لكل ن ∍ N أثبت أن ن^3 زوجي تتضمن زوجي.

9- انفِ ما يلي: إذا كان المحاضر كسولاً فإن بعض الطلبة لن ينهوا واجباتهم المدرسية.

2- المجموعات والاقترانات:

ترد نظرية المجموعات وفكرة الاقترانات (وتدعى أيضاً الدوال) في معظم كتب الرياضيات المدرسية في وقتنا الحاضر. لذلك سنقدم عرضاً موجزاً لهما (ولكنه كافٍ لغاياتِ التحليل) يفسر الرموز التعاريف وبعض النتائج المفيدة.

المجموعة هي أي جمع من الأشياء المحددة والمميزة بحيث ينظر إليها كوحدة. هذا ما قاله الرياضي الألماني الشهير كانتور(1845-1918) مبتكر نظرية المجموعات. وسنأخذ بتعريفه هذا مع أن علماء المنطق الرياضي يعتبرون هذا التعريف غير دقيق.

والأشياء المذكورة في التعريف تسمى عناصر أو أعضاء المجموعة وسنرمز للمجموعات بحروف مذنبة مثل س،ص الخ.

إذا كانت س مجموعة فإن أ ∈ س تعني أن أ عنصر في س. إذا كانت ب ليست عنصر في س فإننا نكتب ب ∉ س ونقول أن ب لا ينتمي إلى س.

المثال (9):

إذا كانت س مجموعة عناصرها هي الأحرف أ،ب جـ نكتب س = {أ،ب،ج}.

ومن المتعارف عليه استخدام هذا النوع من الأقواس لتضم عناصر المجموعة. وهذه أمثلة على الرموز التي نستعملها: ب ∈س، س وكذلك 2 ∉ س.

المثال (10):

يمكن أن تحتوي المجموعة على عناصر متباعدة مثل س = {أ،ب، 3، كتابي}. ولكن مجموعات كهذه لا تظهر في التحليل.

المثال (11):

من الخطأ أن نقول أن {3،1،6،1،5} هي مجموعة لأن تعريف كانتور ينص على أن العناصر يجب أن تكون مميزة. لذلك فإن أي عنصر في المجموعة يظهر مرة واحدة فقط.

المثال (12):

تبقى المجموعة كما هي إذا كتبت عناصرها بترتيب مختلف. مثال على ذلك {2،4،3،1} هي نفس المجموعة {1،2،3،4}. ومن الأفضل بالطبع ترتيب العناصر بطريقة طبيعية ومنتظمة.

وقد يستحيل على الطالب كتابة جميع عناصر المجموعة، فمثلاً لا يمكن كتابة جميع عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية N وهي من أبسط المجموعات في الرياضيات. ففي هذه الحالة نكتب N = {1،2،3، ...} حيث استخدمت الأقواس لتحتوي على العناصر واستخدمت النقاط الثلاث ... لتعني أن قانون تكوين باقي العناصر معروف، وسنتحدث أكثر عن N في الفصل الثاني.

وتقرأ الصيغة {س ∋ N| س >2} :" مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى N بحيث أن س >2" ويقرأ الخط الرأسي بعد N "وحيث أن". وهناك طريقة أخرى لكتابة {س ∋ N| س >2} هي {3،4،5،...}.

مثال آخر: {س ∋ R |س^2=1} = {1،−1}

سنعرف الآن الفكرة الأساسية للمجموعة الجزئية، والاتحاد والتقاطع، ومتممة المجموعة، مع بعض الأفكار المتعلقة بها.

المجموعات الجزئية:

إذا كانت س،ص مجموعتين فإننا نعرف س بأنها مجموعة جزئية من ص إذا فقط إذا كان كل عنصر في س هو أيضاً عنصر في ص. وإذا كانت س مجموعة

جزئية من ص فإننا نكتب س ⊂ ص. كذلك إذا كانت س ⊂ ص فإننا نقول س محتواة في ص أو أن ص تحتوي على س.

المجموعات المتساوية:

تعريف س=ص إذا وفقط إذا كانت س ⊂ ص وكذلك ص ⊂ س، وهذا يعني أن س وص لهما العناصر نفسها.

المجموعات الجزئية فعلاً:

نقول أن س مجموعة جزئية فعلاً من ص إذا وفقط إذا كانت س ⊂ص ولكن س ≠ ص ونكتب س ⊂ ص فعلاً.

المجموعة الخالية:

إذا كانت س مجموعة فإن ϕ = {1 ∋ س | أ ≠ أ} هي مجموعة جزئية من س، وندعو ϕ المجموعة الخالية. المجموعة ϕ لا تحتوي على عناصر.

وهناك خاصية هامة جداً للمجموعة الخالية ϕ وهي إنها المجموعة الوحيدة المحتواة في كل مجموعة أخرى.

لإثبات ذلك لنأخذ أي مجموعة س ولنفرض أن ϕ ليست مجموعة جزئية من س. إذن يوجد عنصر س ∋ ϕ/ س وهذا يناقض حقيقة أن ϕ لا تحتوي على عناصر. ومنه نستنتج أن ϕ ⊂ س لأي مجموعة س. س ∋ ϕ/ س أن س ∋ ϕ ولكن س ∌ س.

لنثبت أن ϕ وحيدة. لنفرض أن Ψ مجموعة أخرى محتواة في كل مجموعة أخرى. إذن Ψ ⊂ ϕ. ولكننا نعرف أن ϕ ∋ Ψ . لهذا من تعريف المجموعات المتساوية نستنتج أن Ψ = ϕ أي أن ϕ وحيدة بالخاصية المذكورة.

المثال (13):

المجموعة {1،3،8} ومجموعة الأعداد الفردية {1،3،5،7،...} هما مجموعتان جزئيتان من N.

لذلك نستطيع كتابة {1،3،8} ⊃ N فعلاً.

اتحاد المجموعات:

اتحاد المجموعتين س، ص هو:

س ∪ ص = {أ | أ تنتمي إلى س أو إلى ص}

وإذا كانت ي عائلة من المجموعات س فإننا نعرّف

∪{ س|س ∋ ي} = {أ | أ تنتمي لعنصر واحد على الأقل من عناصري}.

تقاطع المجموعات:

تقاطع مجموعتين س، ص هو:

س ∩ ص = { أ | أ ∋س ، أ∋ص}

وإذا كانت ي عائلة من المجموعات فإننا نعرف

∩ {س |س ∋ي} = {أ |أ ∋ س لكل س ∋ ي}

المجموعات المنفصلة:

نقول أن المجموعتين س،ص منفصلتان إذا وفقط إذا كان س ∩ ص = φ، أي أنه لا يوجد بين س، وص عناصر مشتركة.

مثال (14):

{أ،ب،جـ} ∪ {أ،جـ،د} = {أ،ب، جـ،د}

{ب،جـ} ∩ {أ،ب،ج،} = {ب،جـ}

{أ،ب} ∩ {جـ،ب} = φ

المتممات:

لنفرض أن س مجموعة وأن ص،ع ⊃ س فإننا نعرف

ص/ع = {أ ∋ س |أ ∋ ص، أ ∋ ع}

ونسمي ص/ع متممة ع بالنسبة إلى ص.

ص ' تعني س/ ص ونسمي ص ' متممة ص.

المثال (15):

لنفرض أن س = N ، ص = {2،4،6، ....}،

ع= {1^2، 2^2، 3^2، 4^2، ...} فإن

ص/ع= {2، 6، 8، 10،12، 14، 18، ...}

وص ' = {1،3،5،7، ....}

النظرية 2 (قوانين ديمورغان):

لنفرض أن س مجموعة وأن {صر} عائلة من المجموعات الجزئية من س، حيث ر تنتمي إلى مجموعة عدّ، ي، فإننا بكتابة ∩ صر لتعني ∩ {صر ار ∋ ي}...الخ نحصل على ما يلي:

(∪ صر)' = ∩ صر' وكذلك

(∩ صر)' = ∪ صر'

البرهان: سنبرهن النتيجة الأولى فقط.

إذا كانت س ∋ (∩ صر)' فإن س ∌ صر .

وهذا يعني أن س لا ينتمي إلى أي من صر. إذا س ∋ صر' لكل ر ∋ي، وهذا يعني أن س ∋ ∩ صر'. وهكذا نكون قد أثبتنا أن (∩ صر)'⊃(∪ صر)'.

ومن الواضح أنه يمكن الرجوع في البرهان عكسياً لإثبات أن:

(∩ صر)'⊃(∪ صر)'. وهذا يثبت النتيجة الأولى.

النظرية (3):

لتكن س أي مجموعة {سر} عائلة من لمجموعات حيث تنتمي ر إلى مجموعة العدي بكتابة ∩ سر لتعني ∩ا {سر ∋ ي} ... الخ لحصل على:

أ) ∩ سہر ⊂ سہر ⊂ ∪ سہر. لكل ر ∈ ي

ب) سہ∩ (∪ سہر) = ∩ (سہ ∪سہر)

جـ) سہ∪ (∩ سہر)= ∩ (سہ ∪سہر)

البرهان:

سنثبت (أ) و (ب)، ونترك (ج) كتمرين.

لنفرض أن أ ∈ ∩ سہر، فمن تعريف التقاطع نستنتج أن أ ∈ سہر لكل ر ∈ ي لذلك فإن ∩ سہر ⊂ سہر، وبطريقة مشابهة من تعريف الاتحاد نحصل على سہر ⊂ ∪سہر لكل ر ∈ ي.

لإثبات (ب) نستخدم تعريف المجموعات المتساوية، فلنفرض أن أ ∈ سہ∩ (∪سہر) إذن أ ∈ سہ، أ ∈ سہر. لذلك أ ∈ سہ و أ ∈ سہر لعنصر ما و ∈ ي، لهذا فإن أ ∈ سہ ∩ سہر ⊂ (سہ ∩ سہر) حسب القسم (أ) .

من هذا نستنتج أن سہ ⊂ (∪سہر) ⊂ ∪ (سہ∩ سہر).

لإثبات العكس لنفرض أن أ ∈ ∪ (سہ ∩سہر) إذن أ ∈ سہ ∩ سہر لعنصر ما و ∈ ي. منه ينتج أن أ ∈ سہ و أ∈ سہر. إذن أ ∈ ∪ سہر. حسب القسم (أ). من هذا ينتج أن أ ∈ سہ ∩ (∪ سہر).

كما أشرنا في المثال (12): لا تتغير المجموعة بتغيير ترتيب عناصرها. فمثلاً {2،1} = {1،2}، وهناك حالات عديدة (في الرياضيات وغيرها) حيث يكون من الضروري تحديد ترتيب عناصر المجموعة.

مثال: لنفرض أن شخصاً بدأ من نقطة في المستوى، ثم سار خطوتين إلى الشرق ثم ثلاث خطوات إلى الشمال فوصل إلى نقطة ب.

يمكن أن نعبر عن كيفية الوصول إلى ب بالمجموعة {3،2}. فإذا بدأ الشخص من أوسار ثلاث خطوات إلى الشرق ثم خطوتين إلى الشمال نعبر عن النتيجة بِ {2،3}. ومن الواضح أنه لم يصل إلى ب هذه المرة. لذلك فإن تساوي المجموعتين {3،2} و {2،3} لا يفسر الوضع بدرجة مرضية.

من الطبيعي أن تطرح فكرة الأزواج المرتبة (س،ص) حيث يكون ترتيب س،ص هاماً. هنا نستخدم أقواساً دائرية بدل المتعرجة للدلالة على الترتيب.

وفي المثال السابق يمكن للرقم الأول أن يدل على عدد الخطوات باتجاه الشرق، والرقم الثاني على عدد الخطوات باتجاه الشمال. لذلك فإن (3،2) تختلف عن (2،3).

سنذكر الآن التعريف الدقيق للأزواج المرتبة ولِ ن من الأشياء المرتبة.

لنفرض أن س، ص شيئان. تعريف (س،ص) كما يلي: (س،ص) = {{س}، {س،ص}}.

وتسمى هذه المجموعة الزوج المرتبة (س،ص).

من التعريف يمكننا أن نثبت أن (س،ص) = (أ،ب) إذا وفقط إذا كان أ = س، ب=ص. وبعبارة أعم يمكن تعريف النوني المرتب (س$_1$،س$_2$، ...،س$_ن$) بأن الخاصية (س$_1$،س$_2$، ....، س$_ن$) = (ص$_1$،ص$_2$، ...، ص$_ن$) تصح إذا وفقط إذا كانت س$_1$ = ص$_1$، س$_2$=ص$_2$، ....،س$_ن$ = ص$_ن$.

المثال (1):

العبارة (س،س) = {{س}، {س،س}} تعني {{س}} لأننا لا نسمح بالتكرار في المجموعة. لاحظ أن (س،ص)= (ص،س) إذا وفقط إذا كان س = ص.

المجموعات التي عناصرها أزواج مرتبة تسمى علاقات، وبعض العلاقات الخاصة (كالضرب الديكارتي، وعلاقة التكافؤ، والاقتران) هامة جداً في الرياضيات. وإليك تعاريفها الدقيقة.

العلاقة:

تعرف العلاقة بأنها مجموعة أزواج مرتبة.

فإذا كانت ع وكان (س،ص) ∈ع نكتب ذلك أيضاً س ع ص.

الضرب الديكارتي:

لنفرض أن س ، ص مجموعتان، فيكون:

س ×ص = {(س،ص)| س ∋ س ، ص ∋ ص}

ويسمى الضرب الديكارتي ل س ، ص.

نكتب س× س غالبا على صورة س^2 ، وس^ن تعني {(س^1،س^2،....،س^ن)}

وكلمة ديكارتي هي نسبة إلى الرياضي الفرنسي رينيه ديكارت.

علاقة التكافؤ:

لنفرض أن س مجموعة وأن ~ مجموعة جزئية من س^2. لهذا فإن ~ علاقة. ومن غير المحتمل الخلط بين ~ وبين إشارة النفي.

تعريف ~ على أنها علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كان:

أ) س ~ س لكل س ∋ س [خاصية الانعكاس]

ب) س ~ ص تتضمن ص ~ س [خاصية التماثل]

جـ) س ~ ص وص ~ تتضمن س ~ ل [خاصية التعدي].

الاقتران:

لنفرض أن س، ص مجموعتان. فالاقتران ق من س إلى ص يعرف على أنه مجموعة جزئية من س × ص تحقق:

أ) لكل س ∋ س يوجد زوج مرتب (س،ص) ∋ ق.

ب) إذا كان (س،ص) ∋ ق، (س،ل) ∋ ق فإن ص = ل.

سنستخدم ق : س ← ص لتدل على أن ق هو اقتران من س إلى ص.

وبعبارة تقريبية إذا كان ق: س ← ص يمكننا أن نقول أنه لكل عنصر س ∋ س يوجد عنصر وحيد ص ∋ ص يرتبط به. وليس من الضروري أن يشمل هذا جميع

عناصر ص. وإذا كان ق: س ← ص وكان (س،ص) ∋ ق فإننا نكتب ق(س)= ص. وهذه هي الطريقة التقليدية لكتابة ص كاقتران ق س. نسمي ص قيمة ق عند س أو صورة س تحت تأثير ق.

وإذا كان ق: س ← ص فإننا نسمي س مجال ق ونسمي ص المجال المقابل لـ ق.

وهناك أسماء أخرى تستعمل لتدل على الاقتران: مثل دالة وتابع، ومؤثر، وتحويل، وتطبيق.

الاقترانات المتساوية:

لنفرض أن ق: س ← ص، م : س ← ص

فإننا نعتبر ق= م إذا وفقط إذا كان ق(س) = م(س) لجميع قيم س ∋ س.

وإذا كان ق: س ← ص فإننا نعرف ق(س) = {ق(س)| س ∋س} ونسمي ق(س) صورة س تحت تأثير الاقتران ق، أو مدى الاقتران ق. ومن الواضح أن ق(س) ⊂ ص (وبصورة عامة يكون الاجتواء فعلياً)

وإذا كان ق(س) = ص فإن الاقتران ق يدعى اقتراناً شاملاً.

وإذا كان : س ← ص وكانت ج ⊂ س فإن الاقتران هـ: ج ←ص والمعروف بـ هـ(س) = ق(س) لجميع س ∋ج يدعى تحديد ق على ج.

المثال (17):

لنفرض أن س = {1،2،3}، ص = {أ،ب} فإن:

س × ص= {(1،أ)، (2، أ)، (1،ب)، (2،ب)، (3،ب)}

ص × ص ={(أ،أ)،(أ،ب)،(ب،ب)، (ب،أ)}

المثال (2):

المساواة هي علاقة تكافؤ على أي مجموعة س: لأن س = س لكل س∋ س، تستلزم أن س= ص تعني أن ص=س، وكذلك س=ص = ع تعني أن س =ع.

المثال (3):

لنعرف ~ على مجموعة الأعداد الصحيحة z كما يلي:

س~ص إذا وفقط إذا كان س - ص يقبل القسمة على 3.

من المتعارف عليه أن نكتب س=ص (مض3) وان س تطابق ص في مضاعفات 3.

نقول ~ علاقة تكافؤ على z لأن:

أ) س-س= صفراً تقبل القسمة على 3.

ب) س-ص=3م تعطي ص-س = 3(-م)،

جـ) س-ص=3م وص-ع=3ل تعطي س-ع =3(م+ل)

وإليك نقطة هامة: لتأخذ $ك_0$ = {ص ∍ z| ص~ 0}.

من الواضح أن $ك_0$ = {0،3،-3،6،-6، ....}، وبصورة عامة إذا كانت $ك_س$= {ص ∍ z | ص~س} نجد أن:

$ك_1$ = {1،4،-2، ....}، $ك_2$ = {2،5،-1، ....}، $ك_3$ = $ك_0$، $ك_4$ = $ك_1$، ...

من الواضح أن كل عدد صحيح ينتمي لمجموعة واحدة فقط من المجموعات $ك_0$، $ك_1$، $ك_2$، تدعى هذه المجموعات صفوف تكافؤ.

المثال (4):

لنفرض أن س = {1،2،3} ، ص = {1،2} فإن:

ق= {(1،2)، (2،2)، (3،1) هو اقتران من س إلى ص أي أن ق:س ←ص.

ولكن هـ = {(1،2)،(3،1)}، م = {(1،23)،(1،2)} ليسا اقترانين من س إلى ص. بالنسبة لـ هـ فالجزء الأول (أ) من تعريف الاقتران لم يتحقق، وبالنسبة لـ م فإن الجزء الثاني (ب) لم يتحقق.

المثال (5):

لنعرف ق(س) = س^2=لكل س $\in R$

إذن ق $R \leftarrow R$ وكذلك ق: $R \leftarrow$ {س $\in R$| س ≥ 0}.

وبعض أنواع الاقترانات لهما أسماء خاصة:

الاقتران التبايني (واحد - لواحد):

يدعى الاقتران ق: س ← ص تباينا أو واحداً لواحد إذا وفقط إذا كانت ق(س$_1$) = ق(س$_2$) تتضمن س$_1$ = س$_2$.

الاقتران الشامل:

يسمى الاقتران ق: س ←ص اقتراناً شاملاً إذا وفقط إذا كان لكل ص$\in$ص يوجد س $\in$س بحيث أن ق(س) = ص. لذلك إذا عرفنا ق(س) ={ق(س)|س$\in$ س} يكون ق شاملاً إذا وفقط إذا كان ق(س) =ص.

اقتران التقابل:

يسمى الاقتران: ق: س←ص$_0$ تقابلاً إذا وفقط إذا كان الاقتران شاملاً وواحداً لواحد معاً.

العملية الثنائية:

العملية الثنائية على المجموعة س هي اقتران ق:س×س ← س.

المثال (6):

لنعرف ق: z ← z بـ ق(ن) = 2ن.

أن ق اقتران واحد لواحد ولكنه ليس شاملاً. أنه واحد لواحد لأنه إذا كانت ق(ن) = ق(م) فإن 2ن = 2م ومنه نستنتج أن م = ن. وليس اقتراناً شاملاً لأن 1$\notin$ z.

لكن ق(ن) عدد زوجي لذلك ق(ن) ≠ 1 لكل ن ∍ z. من هذا ينتج أن ق ليس تقابلاً.

المثال (7):

لتكن ص = {س ∍ R|س ≤ 0} ولنعرف

ق: R ← ص بـ ق(س) = س إذا كانت س ≤ 0 ، ق(س) = −س إذا كانت س > 0. يسمى هذا الاقتران اقتران القيمة المطلقة. ويكتب عادة ق(س) = |س|.

والشكل التالي هو بيان اقتران القيمة المطلقة.

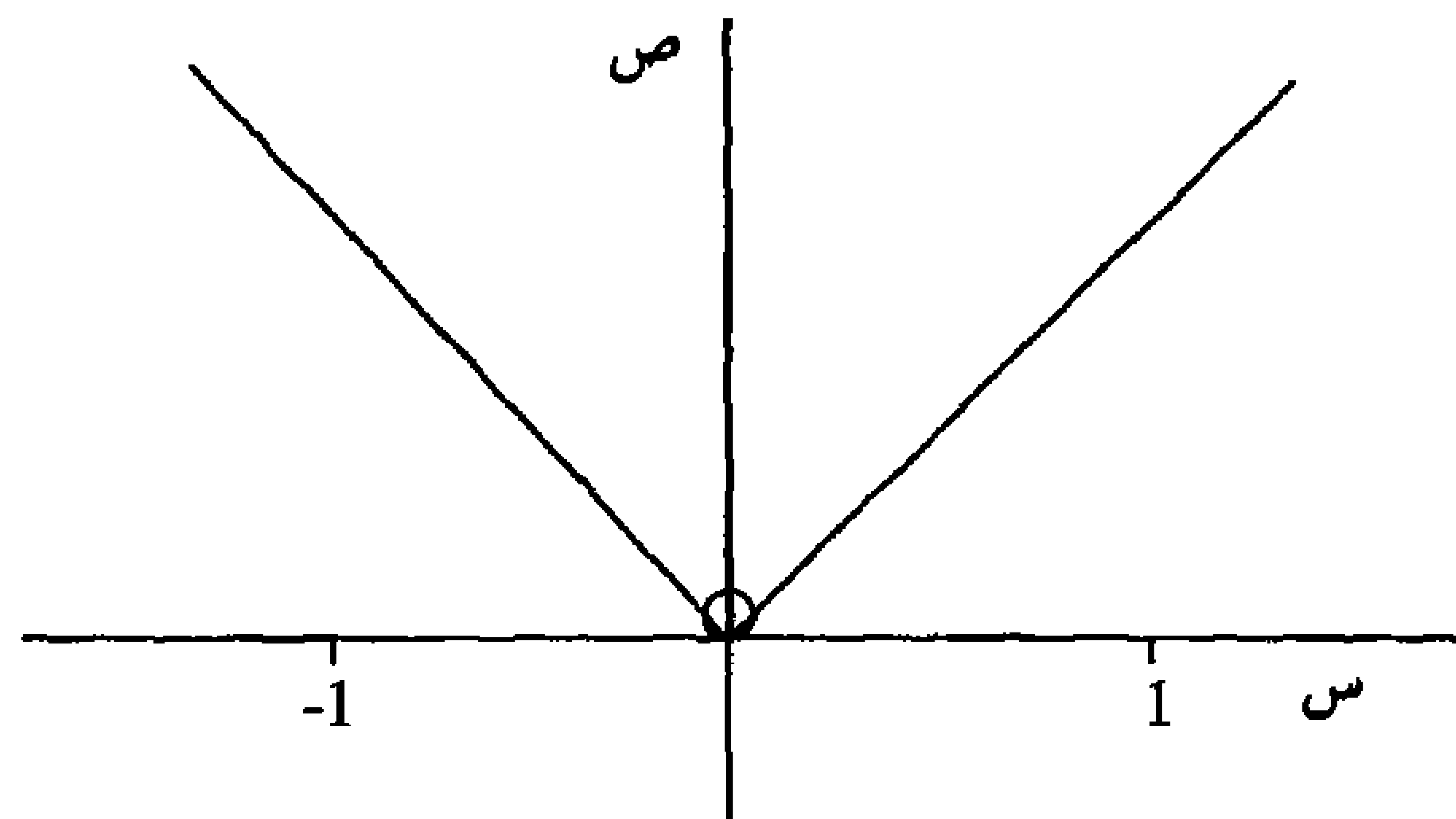
ق ليس واحداً لواحد لأن ق(1) = ق(−1) لا يتضمن 1=−1. ولكن ق اقتران شامل لأنه إذا كانت ص ∍ ص فإن ص ≤ 0 ومن التعريف نرى أن ق(ص). من هذا ينتج أن ق ليس تقابلاً.

المثال (8):

عرف ق: R ← R بحيث أن ق(س) = 2س +3 .

أن ق تقابل لأن ق($س_1$) = ق($س^2$) يتضمن 2$س_1$ + 3=2$س^2$ + 3 ومنه ينتج أن $س_1$ = $س_2$، وإذا كانت ص ∍ R فإنه يوجد س ∍ R بحيث أن ق(س)=ص أي أن 2س+3=ص وبالتحديد فإن:

$$س = \frac{ص - 3}{2}$$



المثال (9):

لنرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالرمز R^+ أي أن R^+ ={س∋R|س>0} فمن الواضح أن الاقتران ق:$R \leftarrow R^+$ المعرف بـ ق(س)= $e^{س}$ هو تقابل.

المثال (10):

عملية الجمع هي عملية ثنائية على N لأنه إذا كان (س،ص) ∋ N×N فإن س+ص ∋ N وهذه بالطبع هي الطريقة العادية لكتابة عملية الجمع. وباستعمال رموز الاقتران فإننا نكتب + : N×N ←N، وأن + ((س،ص)) ∋ N لكل (س،ص) ∋ N × N. وفائدة استعمال الطريقة العادية واضحة.

لاحظ أن عملية الطرح ليست عملية ثنائية على N لأنه على سبيل المثال (2،1) ∋ N × N ولكن 1−2 ∌ N .

سنبرهن الآن نظريتين عامتين.

النظرية (4):

لتكن ~ علاقة على المجموعة س. ولكل س ∋س، لتكن:

ك = {ص ∋ س|ص~س} أي أن $ك_{س}$ هو ما ندعوه بصف التكافؤ المحتوي على س، فإن:

أ) س ∋ $ك_{س}$ لجميع س ∋ س.

ب) $ك_{س}$ = $ك_{ص}$ إذا وفقط إذا كانت س ~ص.

جـ) $ك_{س}$ ≠ $ك_{ص}$ تتضمن $ك_{س}$ ∩ $ك_{ص}$ = ϕ .

د) {$ك_{س}$|س ∋ س} (مجموعة صفوف التكافؤ) المختلفة تمثل تجزئة لـ س، أي أن س هي اتحاد صفوف التكافؤ المنفصلة $ك_{س}$.

البرهان:

أ) س ~ س لكل س وهذا يعطي (أ).

ب) لنفرض أن $ك_س$ = $ك_ص$. فمن (أ) س ∋ $ك_س$ إذن س ∋ $ك_ص$ ومنه س~ ص(من تعريف $ك_ص$).

العكس: لنفرض أن س~ص، فعلينا أن نثبت أن $ك_س$ = $ك_ص$ وسنفعل ذلك بأن نثبت أن $ك_س$ ⊃ $ك_ص$ و$ك_ص$⊃$ك_س$.

لنأخذ ع ∋ $ك_س$. إذن ع~ س وبما أن س ~ ص ينتج من خاصية التعدي أن ع~ ص، ومنه ينتج أن ع ∋ $ك_ص$، الخلاصة: ع ∋ $ك_س$ يتضمن ع∋ $ك_ص$ أي $ك_س$ ⊃$ك_ص$ لنفرض أن ع ∋ $ك_ص$ إذن ع~ص، ومن خاصية التماثل ينتج أن ص ~ع، وهذه مع س ~ ص تتضمن س ~ ع ومنه ع ∋ $ك_س$ وهذا يثبت (ب).

جـ) سنثبت (جـ) باستخدام المعاكس الايجابي. لنفرض أن $ك_س$ ∩ $ك_ص$ ≠ϕ إذن يوجد ع ∋ $ك_س$ ∩$ك_ص$ أي أن ع ∋ $ك_س$، ع ∋ $ك_ص$ إذن ع ~ س، ع~ص وهذا يتضمن س~ ص ومن (ب) ينتج أن $ك_س$ = $ك_ص$.

د) إذا كانت ص ∋س من (أ) ينتج أن ص∋$ك_ص$ ⊃ $ك_س$ ومنه نجد أن س⊃ $ك_س$.

وبالعكس إذا كانت ص ∋ ∪ $ك_س$ لقيمة ما مثل س ∋ س، إذن ص ∋ س. وهكذا ينتج أن ∪ $ك_س$ ⊃ س. وبذلك تكون قد أثبتنا أن س= ∪ $ك_س$، ويتم إثبات النظرية.

المثال (11):

من المثال (19) نرى أن z = $ك_0$ ∪ $ك_1$ ∪ $ك_2$ حيث $ك_0$،$ك_1$،$ك_2$، مجموعات منفصلة.

النظرية [الاقتران العكسي]:

إذا كان ق: س← ص اقتران تقابل، فإنه يوجد اقتران وحيد م : ص ←س بحيث أن م(ق(س)) = س لجميع قيم س ∋ س، وكذلك.

ق(م(س))= ص لجميع قيم ص ∋ ص.

ندعوم عكس ق ونكتب م = $ق^{-1}$.

البرهان:

بما أن ق هو اقتران شامل، فإذا كانت ص∋ص، فإنه يوجد س ∋س بحيث أن ص = ق(س)، ويوجد س واحد فقط، لأنه إذا كان ص = ق(س) فإن ص = ق(س) = ق(س)، وهذا يعطي س=س لأن ق واحد لواحد.

كل عنصر ص ∋ ص يتربط بعنصر وحيد س ∋ س. إذن يوجد اقتران م: ص←س، بحيث أن م(ص) =س. من هذا ينتج أن م(ق(س))=س، ق(م(ص))=ص.

لنثبت أن م وحيد: لنفرض أنه يوجد ل: ص ← س بحيث أن ل(ق(س))=س لجميع قيم س∋س. ولنأخذ أي عنصر ص∋ص. إذن يوجد س∋س بحيث أ ص =ق(س)، إذن ل(ص)= م(ق(س)= س=م(ق(س)=م(ص) إذن ل=م. وهذا يثبت النظرية.

المثال(12):

أ) ق:R ← R المعرف بـــ ق(س)=2س+3 هـو اقـتران تقـابل (أنظـر المثـال 24). وعكسه ق$^{-1}$: R ← R يعطي بالصيغة ق$^{-1}$ (س)=(س−3)/ 2.

ب) ق: R ← R المعرف بـ ق(س)=eس هو اقتران تقابل (سنثبت هذا فيما بعد) وعكسه ق$^{-1}$: R ← $\overline{R}$ ويرمز له بالرمز لو.

المجموعات المتكافئة:

نقول أن المجموعتين س،ص متكافئتان س،ص متكافئتان، ونكتب س ~ ص: إذا وفقط إذا وجد أن اقتران تقابل: ق: س ← ص.

المثال (13):

{1،2،3} ~ {1،3،5} لأن ق المعرف بـــ ق(1) = 1، ق(2)=3، ق(3)=5 هـو اقتران تقابل لكن {1،2} لا تكـافـئ {أ،ب،جـ} لأنـه إذا فرضنـا أن ق: {1،2} ← {1،ب،جـ} هو اقتران تقابل فإن أ = ق(س) لعنصر مـا س ∋ {1،2}، ب=ق(س)

لعنصر ما ص ∋ {2،1} وأن أ ≠ب فـإن س ≠ ص. الآن ج = ق(1) أوج = ق(2)، لذلك إذا كانت س = 1 فـإن أ = ج. وإذا كـانت س = 2 فإن ب=ج. لكـن هـذا يؤدي إلى تناقض لأن أ ≠ج و ب≠ج.

المثال (14):

N ~ {2،4،6،8،....} أي أن N تكـافيء مجموعـة الأعـداد الزوجيـــة وهـــي مجموعة جزئية فعلا من N. ولإثبات ذلك نلاحظ أن الاقتران ق: N{2،4،6،8،...} المعرف بـ ق(ن)= 2ن هو اقتران تقابل.

ليس من الصعب إثبات أن ~ هي علاقة تكافؤ على صف جميع المجموعـات. فمثلا ق:س ← س المعرف بـ ق(س)=س : هو اقتران تقابل.

وفي حساب التفاضل والتكامل يواجه الفرد فكرة الاقتران المركب.

فمثلا إذا كـان ق(س) = جتـاس، م(س)=س^2 فـإن ق(م(س))=جتـاس^2 و م(ق(س))= (جتاس)^2 وعادة نكتب (جتاس)^2 = جتا^{2}س.

والاقترانان جتاس^2 وجتا^{2}س هما اقترانان مختلفان تماما فمثلا جتاπ ≠ جتـا$^2\pi$ سنذكر الآن التعريف العام.

تركيب الاقترانات:

لنفـرض أن ق:س ← ص و م: ص← ع فـــإن: ل:س ← ع المعــرف بـــ ل(س) = م(ق(س)) يدعـى تركيـب الاقـترانين ق،م ونكتـب ل=م$_\circ$ق لهـذا فـإن: (م$_\circ$ق)(س) = م(ق(س)) لجميع قيم س م$_\circ$ق س.

أحيانا يكتب تركيب الاقترانين م، ق على صورة م ق ولكن هذا قـد يسـبب الالتباس لأن حاصل ضرب م، ق يكتب المعرف بـــ(م ق)(س)= م(س). ق(س)، في الحالات التي يكون بها حــاصل الضــرب ممكنـا، مثـلا إذا كـان م(س)، ق(س) أعدادا حقيقية.

الصورة وأصل الصورة:

ليكن ق:س ← ص و ج ⊃ س، ي ⊃ ص.

تعرف ق(ج) = {ق(س)|س ∍ج}، وندعو ق(ج) صورة المجموعة ج تحت تأثير الاقتران ق. لاحظ أن ق(ج) ⊂ص. كذلك نعرف ق$^{-1}$(ي)= {س ∍س|ق(س)∍ ي}

متطابقان في مضاعفات ن. أثبت أن ~ هي علاقة تكافؤ على z.

ب) افرض أن س≡ص (مض ن) وس≡ص (مض ن) أثبت أن س +ص≡ص+ص (مض ن) وكذلك س س ≡ص ص (مض ن).

ومنه أستنتج أن:

س2≡ ص^{2} (مص ن)، ص^{3} ≡ س^{3} (مض ن)، ...

جـ) استخدم الجزء الأخير من (ب) لإثبات أن 2 ^{252}–2 يقبل القسمة على5.

د) أثبت أن العدد الطبيعي (مكتوباً بشكله العشري) يقبل القسمة على 9 إذا وفقط كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9. مثالاً على ذلك 6282 يقبل القسمة على 9 لأن 6 + 2+8=18 يقبل القسمة على 9.

10- لتكن س أي مجموعة ولتكن قو(س) عائلة كل المجموعات الجزئية للمجموعة س.

لنفرض أن:

ق: قو(س)| ← {س ∍ R |س ≥0 } بحيث أن:

ق(ح$_{1}$ ∪ ح$_{2}$) = ق(ح$_{1}$) + ق(ح$_{2}$) لأي مجموعتين جزئيتين منفصلتين ح$_{1}$،ح$_{2}$ من س.

أثبت أن ح ⊃ع ← ق(ح) ≤ ق(ع).

11- لتكن س أي مجموعة وَ ي ⊂س: عرف

ك$_{ي}$:(س) ← {صفر، 1} بـ

ك$_{ي}$(س)=1 إذا كان س ∍ ي،

ك$_{ي}$(س) =صفراً إذا كان س∌ ي

نسمي $ك_ب$ الاقتران المميز لـ ي.

إذا كانت ي، ح ⊂ س فأثبت أن:

أ) $ك_ي = ك_ح$ إذا وفقط إذا كانت ى = ح

ب) $ك_ي \geq ك_ح$ إذا وفقط إذا كانت ي ⊃ ح

ج) $ك_{ب \cap ح} = ك_ب . ك_ح$،

د) $ك_{ي \cup ح} = ك_ح . ك_{ي \cap ح}$

لاحظ أنه في ج) تعني $ك_{ي \cap ح}$ (س) = $ك_ي$(س)$ك_ح$(س) لكل س ∍ س، وكذلك في د)تعني $ك_{ي \cup ح}$ (س)= $ك_ب$ (س)+ $ك_ح$(س)-$ك_{(ي \cap ح)}$ (س) لكل س∍ س.

3- الرمز، الحلقات، الحقول، الفضاءات، الخطية، الجبريات:

مفهوم الزمرة من أبسط الأفكار وأكثرها أساسية في الرياضيات، والفكرة سهلة إلا أن نظرية الزمر واسعة جداً. وتوجد أوليات هذا النظرية في أي كتاب يبحث في الجبر المجرد. والزمر هي أساس نظم أخرى تظهر في التحليل، مثل الحلقات والفضاءات الخطية، لذلك سنذكر بإيجاز بعض الأفكار الأساسية للزمر.

ولكي نتمكن من إعطاء أمثلة سنفترض المعرفة ببعض الخواص الأولية لمجموعة الأعداد الصحيحة ولمجموعة الأعداد الحقيقية الخ.

لنأخذ بعين الاعتبار الزوج المرتب (z،+) الذي يتكون من z وعملية ثنائية هي عملية الجمع على z. نلاحظ الخواص التالية:

أ) عملية الجمع هي عملية تجميعية أي أن:

أ + (ب+ج) = (أ+ب) + ج لجميع أ، ب، ج ∍ z.

ب) يوجد عنصر محايد مـ ∍ بحيث أن مـ +س = س+مـ = س لجميع س∍ z.

جـ) لكل أ ∍ z يوجد نظير $\hat{أ}$ ∍ z بحيث أن: أ+$\hat{أ}$=$\hat{أ}$+أ=مـ

في ب) مـ هو بالطبع العدد صفر وفي ج) $\hat{أ}$ = –أ

لذلك أ+(-أ)=(-أ)+أ=صفراً.

مثال آخر: لنأخذ الزوج المرتب (R^+، 0) الذي يتكون من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة مع عملية الضرب على R^+. عملية الضرب هي عملية ثنائية لأن أ.ب> صفر عندما يكون أ > صفر وب > صفر.

من السهل أن نثبت أن الخواص (أ)، (ب)، (ج) السابقة تبقى صحيحة إذا استبدلنا R^+ بـ z ، وعملية الضرب بعلية الجمع فمثلاً ب) تصبح مـ.أ= أ.مـ = أ لكل أ ∍ R^+ وفي هذه الحالة مـ هو العدد الحقيقي الموجب.

إذا نظرنا بتمعن إلى المثالين السابقين، نرى أن كلاً منهما توضيح لما ندعوه بالزمرة. وها هو التعريف الدقيق للزمرة.

الزمرة (ز،*) هي عبارة عن زوج مرتب يتكون من مجموعة غير خالية ز وعملية ثنائية * على ز بحيث أن:

1- العملية الثنائية * هي عملية تجميعية، أي أن:

(أ*ب) * ح = أ * (ب*ج) لجميع أ ، ب، ج ∍ ز.

2- يوجد عنصر محايد مـ ∍ ز بحيث أن:

مـ *أ = أ *مـ = أ لجميع أ ∍ ز.

3- لكل عنصر أ ∍ ز يوجد نظير أ̂ بحيث أن:

أ * أ̂ = أ * أ̂ = مـ

من السهل أن نرى أن مـ وحيد وأنه لكل أ يوجد نظير واحد فقط.

في كثير من الزمر المستعملة يكون أ*ب= ب* أ لكل أ، ب ∍ ظ، (أي أن العملية * هي عملية تبديلية. مثل هذه الزمر تسمى زمراً تبديلية، أو زمراً أبيلية (نسبة للرياضي النرويجي آبل (1802-1829). لهذا فإن (z,+) ، ($0,R^+$) هي زمر تبديلية. المثال التالي يؤكد على أن الزمرة يمكن أن تكون أي مجموعة غير خالية مع عملية ثنائية مناسبة وليس فقط مجموعة أرقام مع عملية حسابية مألوفة.

وإذا كانت الزمرة تحتوي عدداً منتهياً من العناصر فإن عدد عناصرها يسمى رتبة الزمرة. مثال على ذلك ز = {1، -1} مع عملية الضرب هي زمرة تبديلية من الرتبة الثانية. يمكننا إثبات أن جميع الزمر التي رتبتها ≤ 5 هي بالضرورة زمر تبديلية.

والمثال (32):

لتكن س أي مجموعة غير خالية، ز هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية للمجموعة س لهذا فإن $\phi \in$ز، س $\in$ز . لنعرف عملية * على ز كما يلي:

$ح_1 * ح_2 = (ح_1 \cap ح_2^{'}) \cup (ح_1 \cap ح_2)$ ..... (8)

جرت العادة على تسمية $ح_1 * ح_2$ الفرق المتماثل لـ $ح_1$ و$ح_2$.

$ح_1^{'}$ ترمز لمتممة المجموعة $ح_1$.

من الواضح أن (8) تعرف عملية ثنائية لأن الطرف الأيسر منها هو مجموعة جزئية من س.

وبما أن $\phi * ح = (\phi \cap ح^{'}) \cup (ح \cap \phi^{'}) = \phi \cup (ح \cap س) = ح$ وبما أن * عملية تبديلية، نرى أن ϕ هو العنصر الحايد، لهذا فإن الشرط (2) من شروط الزمرة قد تحقق أيضاً.

$ح * ح = (ح \cap ح^{'}) \cup (ح \cap ح^{'}) = \phi$ لكل ح $\in$ز

أي أن ح هي نظير ح لكل ز. وهذا يحقق الشرط (3) من شروط الزمرة.

أما الشرط (1) فهو أعقد الشروط في هذه الحالة:

فباستخدام قانون التوزيع للمجموعات نستنتج من (8) أن:

$ح_1 * ح_2 = (ح_1 \cup ح_2) \cap (ح_1^{'} \cup ح_2^{'})$ وكذلك فيكون

$(ح_1 * ح_2)^{'} = (ح_1 \cap ح_2) \cup (ح_1^{'} \cap ح_2^{'})$

$(ح_1 * ح_2) * ح_3 = \{(ح_1 \cap ح_2^{'}) \cup (ح_1 \cap ح_2^{'})\} * ح_3$

$= [\{(ح_1 \cap ح_2^{'}) \cup (ح_1 \cap ح_2^{'})\} \cup ح_3^{'}] \cup [\{(ح_1^{'} \cap ح_2^{'}) \cup (ح_1 \cap ح_2)\} \cap ح_3]$

وبتبديل ح1، ح3 نرى أن (ح3*ح2)*ح1 = ح1 (ح1*ح2)*ح3

ولكن * هي عملية تبديلية لهذا فإن:

$(ح_3*ح_2)*ح_1=ح_1*(ح_3*ح_2)$. ومنه:

$(ح_1*ح_2)*ح_3 = ح_1* (ح_2*ح_3)$

وهذا يثبت الشرط (1) من شروط الزمر.

ونرغب أحياناً أن نقارن زمرتين (ز،$_1$*)، (ى،5)، ونفعل ذلك عادة بدراسة اقتران بين الزمرتين يحافظ على العمليات الثنائية.

الاقتران المحافظ والتشاكل:

الاقتران المحافظ من (ز،*) إلى (ى،5) هو اقتران ق:ز ← ي يحقق الشرط

ق(أ *ب) = ق(أ)o ق(ب) لجميع أ،ب ∍ ز

إذا كان الاقتران المحافظ تقابلا فإنه يدعى تشاكلاً. وتسمى الزمرتان متشاكلتين إذا وفقط إذا وجد بينهما تشاكل.

إذا كتبنا ز~ لتعني أن زوي هما زمرتان متشاكلتان، فإنه يكون من السهل التحقق من أن ~ هي علاقة تكافؤ على عائلة جميع الزمر. ولهذا فإن الزمرتين المتشاكلتين ينظر إليهما في نظرية الزمر كمتكافئتين.

المثال (33):

زمرة الأعداد الحقيقية مع عملية الجمع، (R، +)، وزمرة الأعداد الحقيقية الموجبة مع عملية الضرب، (R^+،0)، هما زمرتان متشاكلتان.

ذلك أننا سنثبت الأسي أن الاقتران الاسي.

ق: (R ، +) ← (R^+، 0) المعرف بـ ق(س) = $e^{س}$ هو تشاكل

في هذه الحالة فإن خاصية المحافظة ق(أ+ب) = ق(أ) . ق(ب) تصبح $e^{أ+ب} = e^{أ}.e^{ب}$،

وهذه قد تكون من أهم خواص الاقتران الأسي.

المثال (34):

لتكن (ز،0) هي الزمرة {1،-1} مع عملية الضرب، عرف

ق: (z، +) ← (ز ، 0) بـ ق(2أ) = 1،

ق(2أ+1) = -1 لكل أ ∍ z. بفحص الحالات عندما تكون أ،ب ∍ z أعداداً زوجية أو فردية: يتضح أن ق هو اقتران محافظ فمثلاً إذا كان أ زوجياً وب فردياً فإن أ + ب يكون عدداً فردياً. ولهذا فإن ق (أ+ب) = -1، ق(أ)=1، ق(ب)=-1؛ ومنه ق(أ+ب)= ق(أ). ق(ب).

من الواضح أن الاقتران ق هو اقتران شامل ولكنه ليس واحداً لواحد. فعلى سبيل المثال ق(2)=ق(4). ولكن 2 ≠ 4 ولهذا فإن ق ليس تشاكلاً. لاحظ أن هذا لا يثبت أن (z، +) و(ز،0) ليستا متشاكلتين، لأنه ربما يكون من الممكن إيجاد تشاكل بينهما. ولكن في هذه الحالة بالذات يمكن إثبات أنه لا يوجد تشاكل بين هاتين الزمرتين (أنظر التمرين 1-3).

المثال (35):

لنأخذ علاقة التكافؤ ~؛ فمن المثال 19 حصلنا على ثلاثة صفوف تكافؤ ك$_0$،ك$_1$، ك$_2$ سنرمز لها بـ$\bar{0},\bar{1},\bar{2}$ على التوالي. لهذا نحصل على ما يلي:

$\bar{0}$ = {0، 3، -3، 6، ....}

$\bar{1}$ = {1،4،-2، .....}

$\bar{2}$ = {2،5،-1، ....} وتدعى هذه صفوف التكافؤ لمضاعفات 3 ويرمز لها بالرمز z .

وسنجري عملية ضرب على z_3 حسب القاعدة التالية $\bar{أ}\bar{ب}=\overline{أب}$ مثلاً $\bar{2}\bar{2}=\bar{4}=\bar{1}$.

علينا أن نتحقق أن هذه القاعدة تعرف صف تكافؤ وحيداً. أي علينا إثبات أنه إذا كان أ ~ جـ، ب~د فإن أب ~جـ د، أي أن $\overline{أب}=\overline{جـد}$.

الان أ−جـ=3ر$_1$ ، ب−د= 3ر$_2$، حيث ر$_1$، ر$_2$ ∋ z وهذا يعطـي أب=جـ د+ 3(ر$_1$د+ر$_2$جـ) + 9ر$_1$ر$_2$.

ومنه ينتج أن أب−جـ د تقبل القسمة على 3 أي أن أ ب ~ جـ د.

لنأخذ $z_3^*=\{\bar{1},\bar{2}\}$ ، عناصر z_3 غير الصفرية، مع عملية الضـرب الثنائيـة الـتي عرفناها تواً.

من السهل إثبات أن z_3^* هي مجموعة رتبتها 2 وعنصرها المحايد هو $\bar{1}$. ومـن المفيد أن تكتب جدول زمر لمثل هذه الزمر المنتهية الصغيرة.

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	z_3^*
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	

من المفيد أن نلاحظ أن كل زمرة رتبتها 2 تشاكل z_3^* .

لإثبات هذا نفرض أن ز = {س،مـ} هي زمرة تتكون من عنصريـن مختلفـين حيث مـ العنصر المحـايد. إذن س*ص ∋ ز، ومنـه س*س= س أو س*س= مـ. ولو كانت س*س=س فإن $\bar{س}$*س=مـ أي أن ($\bar{س}$*س) *س=مـ=مـ*س=مـ إذن س= مـ وهذا يناقض س ≠ مـ إذن س * س=مـ.

وجدول الزمرة (ز،*) هو:

	مـ	س	
مـ	مـ	س	(ز)
س	س	مـ	

وبالنظر إلى جدولي (ز) و(z_3^*) نرى أن ز تشاكل z_3^*، وبعبـارة أدق فـإن الاقتران ق: ز ← z_3^* المعرف بـ ق(مـ)= $\bar{1}$، ق(س)= $\bar{2}$ هو تشاكل.

وإذا أخذنا z_4^* مجموعة صفوف التكافؤ لمضاعفات 4 حيـث أ~ ب تعـني أن أ−ب يقبل القسمة على 4، فإن العناصر غير الصفر في z_4^* مـع عمليـة الضـرب لا

تكون زمرة، لأنه على سبيل المثال $\bar{2}.\bar{2}=\bar{0}\notin z_4^*$، ولهذا فإن عملية الضـــرب ليست عملية ثنائية.

وبشكل عام يمكن إثبات أن $z_ن^*$ مع عملية الضرب لصفوف التكـافؤ تكـون زمرة إذا وفقط إذا كان ن عدداً أولياً، أي أن ن لا يقبل القسمة إلا على ن وعلى 1 فقط.

سنفحص الآن الفكرة الهامة:"زمرة داخل زمرة" أو الزمرة الجزئية: لنأخذ زمرة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع (z، +). فالمجموعة.

ج={0،2،-2،4،-4،....} للأعداد الصحيحة الزوجية هي مجموعة جزئية من z. ومن الواضح أن (ج،+) هي زمرة. ومن المهم التأكد من أن + ما زالـت عمليـة ثنائية على ج أي أن أ + ب∈ ج. وهذا واضح لأن 2م +2ن=2 (م+ن) لكـل م، ن∈ z. والمجموعة المكونة من عنصر واحد {0} هي زمرة جزئية مع عملية الجمع، بينمـا المجموعة {0،1،2،3،...} ليست زمرة جزئية، فعلى سبيل المثال: العنصر 1 ليس لــه نظير في المجموعة ع={0،1،2،3،....}أي أنه لا يوجـد س ∈ ع بحيث أن س+1=0. ومن الواضح أيضاً أن مجموعة الأعداد النسبية الموجبة مع عملية الضـــرب $(Q^+، 0)$ هي زمرة جزئية من $(R^+، 0)$.

سنعطي الآن تعريف الزمرة الجزئية:

الزمرة الجزئية:

الزمرة الجزئية (ى،*) للزمرة (ز،*) هي مجموعة ى غير خالية وجزئية من ز بحيث أن (ى،*) هي زمرة أيضاً.

من المفهوم أن * هي عملية ثنائية علـى ى أي أن أ*ب ∈ ى لكـل أ،ب∈ى. والنظرية التالية تعطينا طريقة لمعرفة هل المجموعة الجزئية مـن زمـرة مـا هـي زمـرة جزئية أم لا:

النظرية (7):

إذا كانت ى مجموعة غير خالية وجزئية من الزمرة (ز،*) فإن (ى،*) تكـون زمرة جزئية إذا وفقط إذا كان أ*بَ ∋ ى لكل أ،ب ∋ ى.

البرهان:

أولاً لنفرض أن (ى،*) هي زمرة جزئية، لنأخذ أ، ب∋ ى.

إذن بَ ∋ ي لأن ى زمرة جزئية وأيضاً أ * بَ لأن * هي عملية ثنائية على ى. وهذا يثبت الجزء (فقط ذا) من النظرية.

ثانياً لنفـرض أن أ*بَ ∋ ى لكـل أ، ب∋ ى. علينـا إثبـات أن (ي،*) هـي زمرة.

لنأخذ أ ∋ ى إذن أَ ∋ ى، وهذا يثبت أن العنصر المحايد في المجموعة الأصليـة ز هو عنصر محايد في ى.

كذلك لأي عنصر أ ∋ ى، بما أن مـ ∋ ى فإن مـ * أَ ى أي أن ∋ أَ ى. وهـذا يثبت الشرط (3) من شروط الزمرة. وخاصية التجميع واضحة لأن أ*(ب*جـ) = (أ*ب)*جـ لجميع عناصر ز فهي بالتـأكيد صحيحـة لجميـع عنـاصر أي مجموعـة جزئية من ز.

أخيراً لنفرض أن أ،ب ∋ى. لقد أثبتنا أن بَ ∋ى، ومنه أ، بَ ∋ى. ومـن الفرض ينتج أن أ * بَ ∋ ى ولكـن بَ=ب. إذن أ *ب ∋ ى. وهـذا يثبـت أن * هي عملية ثنائية على ى. وهذا يثبت النظرية.

وكثير من الزمر التي نشاهدها في التحليل هي تبديلية. لهذا سوف نهتم بـهذه الزمر في معظم ما سيأتي.

إذا كانت (ز،*) زمرة تبديلية و (ي،*) زمرة جزئية فيها (بالضرورة ستكون تبديلية)، يمكننا تكوين زمرة جزئية جديدة تدعى بالزمرة الكسرية يرمـز لها بـالرمز ز/ ى. وعناصر هذه الزمرة هي عبـارة عـن صفـوف التكـافؤ الـتي تحددهـا علاقـة

التكافؤ، المعرفة بـ أ~ب إذا وفقط إذ كان أ * ب ∋ ى حيث أ،ب ∋ز. سنثبت كل هذا الآن.

النظرية(8)

لتكن زمرة تبديلية، ى زمرة جزئية من ز لكل أ، ب ∋ ز،عرف أ~ب لتعني أ * ب ∋ ي . إذن تكون ~ علاقة تكافؤ على ز. ولتكن ك ا = {ب∋ ز | ~أ} يمكننا تعريف عملية ضرب على صفوف التكافؤ ك أ بالقاعدة.

ك ا ∩ ك ب= ك ا ?ب لكل أ، ب ∋ ز

مع عملية الضرب □ تصبح مجموعة صفوف التكافؤ زمرة تبديلية يرمز لها بالرمز ز/ ي وتعرف بالزمرة الكسرية ز على ى.

البرهان من السهل إثبات أن ~ هي علاقة تكافؤ. فعلى سبيل المثال إذا كانت أ ~ب ، ب~ج فإن أ*ب ∋ ى، ب* ج∋ ى ومنه (أ*ب) (ب*جـ)∋ ى.وخاصية التجميع تعطي (أ*مـ)*جـ= أ* ج∋ ى ، أي أن أ~جـ.

علينا إثبات أن ك ا □ ك ب = ك ب= ك أ • ب هي صحيحة التعريف، أي أن عملية الضرب لا تعتمد على العناصر التي نختارها من ك أ، ك ب فنلفرض أن

أ ~س، ب~ ص. الآن أ*س ∋ ى، ب*ص∋ ى ومـــه (أ*ب)*(س*ص) = أ*(ب*ص)*س= (أ*س) * (ب*ص) ∋ ى

وهذا يعطي أ*ب~س* ص. ومنه ك ا*ب =ك س*ص

فعلى سبيل المثال:العنصر المحايد هو ك ـ □ ك أ = ك ـ*ا= ك ا

ك ا= ك ا لأن ك ا □ ك ا•ا = ك م

وهذا ينهي إثبات النظرية.

أن فكرة الحلقة الكسرية (التي تشابه فكرة الزمرة الكسرية) سترد بعد قليل وهي مهمة في عملية بناء الأعداد الحقيقية من الأعداد النسبية.

لتكن ز هي الزمرة التبديلية (z، +) ولتكن ى الزمرة الجزئية {0،3،-3،6،-6،....} فإن ز/ ى هي الزمرة z_3 لصفوف تكافؤ مضاعفات العدد 3 مع الجمع.

ولبعض الزمر التي قدمناها في أمثلة سابقة خـواص جبرية أكـثر مما قدمنـا. فعلى سبيل المثال لا نحتاج لجمع الأعداد الصحيحـة (اعتـبر الزمـرة (z،+) مثـالاً) ولكننا نحتاج أن نضرب الأعداد الصحيحة. ولسوء الحظ فـإن (z،0) ليسـت زمـرة مع عملية الضرب. وبالطبع فإن 0هي عملية ثنائية تبديلية وتجميعية على z، والعدد 1 هو العنصر المحايد في عملية الضرب ولكن لا يوجد نظير لكل عنصـر في (z،0). يوجد نظائر للعنصرين 1 و -1 فقط. وهنالك نقطة أخرى يجب ملاحظتها وهي أن العمليتين +،0 تتداخلان في خاصية التوزيع.

أ . (ب+جـ) = أ. ب+أ .جـ

والنظام الجبري الذي له تقريباً نفس خواص (z، +،0) يدعى حلقة، ونقـول "تقريباً نفس الخواص" لأنه في الحلقـة المجـردة لا نشـترط أن تكـون عمليـة الضـرب تبديلية ولا نشترط أن يكون هناك عنصر محايد لعملية الضرب.

الحلقة:

تعرف الحلق على أنها ثلاثة أشياء مرتبة (س،+،0) تتكون من مجموعـة غـير خالية س وعمليتي جمع وضرب ثنائيتين على س بحيث أن:

1- (س، +) هي زمرة تبديلية .

2- (س،0) تحقق الشرط (1) من شروط الزمرة أي أن لها الخاصية التجيعية.

3- خاصية التوزيع تحقق.

أ (ب+جـ) = أب+أجـ

(أ+ب)جـ= أجـ+ب جـ لكل أ، ب، جـ ∈ س.

لاحظ أننا كتبنا كما هو متعارف عليه أب بدلاً من أ٠ب. وهذا سيئ منطقيـاً لكنه أوجز. وسنرمز للعنصر المحايد في (س،+) بالرمز صـ صفر الحلقة.

في (س، +) سنشير إلى نظير أ بالرمز - أ لذلك فإن -أ + أ=أ + (-أ)=هـ.

تدعى الحلقة تبديلية إذا كانت عملية الضرب تبديلية أي إذا كانت أب= ب أ لكل أ،ب ∍ س. وإذا كانت (س،0) تحقق الشرط 2) من شروط الزمر أي أنه يوجد عنصر محايد ولعلمية الضرب فإن س تسمى حلق محايدة.

وفي الغالب سنأخذ الحلقات بحيث إذا كانت تحوي عنصراً محايداً وفان و≠صـ. وهذا يجنبنا الحلقة التي تحوي على صـ فقط.

المثال (37):

من أسهل الحلقات س، بعد الحلقة التي تحتوي على صـ فقط، الحلقة المعطاة بجدولي الجمع والضرب التاليين:

+	صـ	و
صـ	صـ	و
و	و	صـ

0	صـ	و
صـ	صـ	صـ
و	صـ	و

هذه الحلقة هي في الحقيقة، حلقة صفوف التكافؤ لمضاعفات 2(z_2، +،0). وبعبارة أدق فإنها تشاكل هذه الحلقة، وهذا يعني أنه يوجد اقتران ق: س← z_2 بحيث أن ق(أ+ب) = ق(أ) +ق(ب)، ق(أب)= ق(أ)ق(ب) لكل أ، ب ∍س. والاختيار الطبيعي لـ ق هو المعرف بـ ق(صـ)= $\bar{0}$، ق(و)= $\bar{1}$.

المثال (38):

لعل أهم الحلقات وأكثرها أساسية حلقة الأعداد الصحيحة (z،+،0) التي مهدت لتعريف الحلقة المجردة وفلولا حلقة الأعداد الصحيحة لما كنا نعرف الرياضيات بوضعها الحالي.

المثال (39) لأعداد جاوس الصحيحة

لنفترض المعرفة بالاعداد المركبة (الفصل الثاني). ولنفرض أن ت هو العدد المركب حيث أن ت^2=-1. ولنفرض أيضاً أن س = {أ+ت جـ| أ، جـ ∍ z}

سنضرب ونجمع عناصر س كما هو الحال في الأعـداد المركبـة. فمثـلاً (أ+ب جـ) (س+ت ص) = (أ س−جـ ص) + ت(جـ س+ أص) حيث أ، جـ، س،ص، ∍ z.

إذن فعملية الضـرب هـي عمليـة ثنائيـة علـى س. ومـن السـهل إثبـات أن (س،+،0) هي حلقة تدعى الأعداد الصحيحة الجاوسية نسبة إلى الألمـاني جـاوس (1777-1855) أحـد أعظـم الريـاضيين في التـاريخ. وفي الفصـل الثـاني سـنقابل حلقات أخرى تتكون من المتتاليات اللانهائية من الأعداد النسبية. وهـذه الحلقـات هامة في التحليل لعلاقتها في بناء نظام الأعداد الحقيقية من الأعداد النسبية.

وما يقابل الزمر الجزئية والزمـر الكسـرية هنـا الحلقـات الجزئيـة والحلقـات الكسرية.

إن تعريف الحلقة الجزئية واضح: فهي مجموعة جزئية غير خاليـة مـن حلقـة ما، وتكون هي نفسـها حلقـة. وكمثـال علـى ذلـك مجموعـة الأعـداد الصحيحـة الزوجية ج فهي حلقة جزئية من z. وحـاصل ضـرب عدديـن زوجيـين هـو عـدد زوجي.

وبشكل خاص فإن ج لها الخاصية التالية: إذا كان أ ∍ ج، و ب∍ z فإن أب ∍ج.

وأمثال هذه الحلقة الجزئيـة تدعـى مثاليـة ويكفـي أن نركـز علـى الحلقـات التبديلية.

المثاليات:

لتكن (س، +، 0) حلقة تبديلية و م ⊂س بحيث أن (م، +) هي زمرة جزئيـة من (س،+) وبحيث أن أب ∍ م لكل أ ∍ م ولكل ب ∍س.

في هذه الحالة نسمي م مثالية في س. لاحظ أن المثالية هي حلقـة جزئيـة لأن أب∍ م لكل أ∍ وب ∍س تتضمن أن أ ب ∍ م لكل أ، ب ∍م.

وإذا كانت س حلقة تبديلية فإننا نكون الحلقة الكسرية لـ س بالنسـبة لحلقـة جزئية مثالية م، أي س/ م. لذلك وكما سنثبت فإن س/ م سـتكون حلقـة. أمـا إذا كانت م حلقة جزئية ليست مثالية فإن هذا لن يكون صحيحاً.

وكما في النظرية 8، تعرف ~ بالنسبة للزمـرة الجزئيـة (م،+) أي لكـل أ،ب∋ س. أ ~ ب تعني -أ + ب∋ م. ومن النظرية / نحصل على أن (س،+)/ (م،+) هـي زمرة تبديلية. وعملية جمع صفوف التكافؤ تعرف بالطبع كالتالي:

كأ□ كب= كأ+ب. ولنحاول تعريف عملية ضرب على صفـوف التكـافؤ بــ كأ•كب = كأب حيث أب تمثل عملية الضرب علـى الحلقـة س. وسـنثبت أن هـذا التعريف له معنى.

عندما نثبت ذلك سيكون من السهل إثبات خاصية التجميع والتوزيع... الخ.

لنأخذ أ،ب،ج،د. فيما أن -أ+د ∋ م، -ب+جـ ∋ م فإن د=أ+و، جـ=ب+ و$_2$ حيث و$_1$، و2 ∋ م ومنه

جـ د = أب + و$_1$ (ب+و$_2$) + أو$_2$

جـ د + (-(أب)) = و$_1$(ب+و$_2$) + أو$_2$ ....(9)

لكن م هي حلقة جزئية مثالية. إذن و1 (ب+و2)∋ م وكذلك أو$_2$∋ م. لذلك (9) تتضمن أن جـ د + (-(أب)) ∋ م، أي أن أ ب ~ جـ د لهذا فـإن ك أب= كجـ د وهذا ما كنا نريد ولنلخص ذلك:

الحلقات الكسرية:

لتكن س حلقة تبديلية، م مثالية في س. فيوجد حلقـة كسـرية س/ م تتكـون من صفوف التكافؤ التي تعينها العلاقة ~ والمعرفة بـ أ ~ ب إذا وفقـط إذا كـانت -أ+ب ∋ م. وعمليتا الجمع والضرب معرفتان على س/ م كما يلي:

كأ+ كب= كأ+ب ، كأ• كب= كأب

المثال (40):

لنأخذ الحلقة z والمثالية:

م = {0،3،-3،6،-6،...} فإن z/ م هي حلقة صفوف التكافؤ لمضاعفـات 3. (أنظر المثال 35).

المثال (41):

لنأخذ حلقة الأعداد النسبية Q والحلقة الجزئية z. z ليست مثالية في Q. فمثلاً 3. (1/ 2) z?z∌?ومن السهل ملاحظة أنه يوجد أ، ب، جـ ، د ∍?Q?بحيث أن أ ~ ب، جـ ~ ولكن أجـ ~ بد. وهذا يثبت أنه لا يمكن استبدال الحلقة الجزئية المثالية بأي حلقة جزئية عند تكوين الحلقات الكسرية.

لقد حاولنا إعطاء فكرة كاملة عن الأشياء التي سوف يحتاج إليها من نظرية الزمر والحلقات. ونريد أن نؤكد أنه في التحليل، كما في الجبر، على الفرد أن يكون مستعداً للتحقق من كون أية فكرة جديدة تطرح ذات بنية جبرية.

فعلى سبيل المثال إذا عرفنا المتسلسلات المتقاربة للمرة الأولى، فعلى الفرد أن يسأل هل يمكن جعل مجموعة جميع المتسلسلات المتقاربة زمرة أو حلقة. وأيضاً هل هناك زمر جزئية أو حلقات جزئية مثالية، وهل يمكن جعل هذا النظام الجديد يشاكل نظاماً معروفاً؟ (وفي هذه الحالة لا يكون النظام في الواقع جديداً).

وهناك ثلاث بنى جبرية يتكرر استعمالها في التحليل هي الحقول والفضاءات الخطية والجبريات. وعلى القارئ أن يلاحظ محتويات فرضيات هذه البنى الآن حيث ستطرح في فصول لاحقة أمثلة طبيعية لها.

الحقل:

يعرف الحقل (ح، +،0) على أنه حلقة تبديلية لها صفر 0 وعنصر محايد 1 ?0، بحيث أن لكل عنصر أ ?0 يوجد نظير ضربي أ∍ح. وتكتب عادة أ = $أ^{-1}$ لهذا فإن $أأ^{-1}$ = $أ^{-1}$أ =1.

وفي الحقول المجردة لا علاقة للصفر والعنصر المحايد بالعددين العاديين 0،1 لكننا سنستعمل هذين الرمزين لأن اهتمامنا سنحصر في حقل الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة حيث يكون 0،1 هما صفر الحقل والعنصر المحايد على التوالي.

الفضاء الخطي:

لتكن س={س،ص، ...} زمرة تبديلية مع عملية الجمع + وليكن ح={أ،ب،جـ،...} حقلا صفره 0 وعنصر المحايد 1.

فالفضاء الخطي س على الحقل ح الرباعي المرتب (س،ج،+،0) حيث العملية. معرفة ح × س إلى س وحيث:

1- أ • س= س

2- أ • (س+ص) = أ•س + أ•ص

3- (أ+ب) • س= أ•س + ب•س

4- أ• (ب•س) = (أب)• س

وفي الفضاء الخطي نسمي عناصر س بالمتجهات وعناصر ح بالأعداد. لاحظ أنه في (4) نستخدم عملية الضرب أب في الحقل وكذلك عملية• التي تسمى الضرب العددي في أ•س، الخ. والعنصر المحايد في (س،+) يرمز له بالرمز صـ ويسمى المتجه الصفري.

الجبريات:

الجبرية هي عبارة عن فضاء خطي س على حقل ج بالإضافة إلى عملية ضرب على س يرمز لها بـ س ص حيث س ص ∍ س لكل س، ص ∍س.

وحيث تتحقق الشروط التالية:

1- (س ص) ع = (ص ع)

2- س(ص+ع) = س ص + س ع

3- (س +ص) ع = س ع + ص ع

4- أ • (س ص) = (أ • س) ص = س (أ • ص).

إذا كانت س ص = ص س فإن الجبرية تسمى جبرية تبديلية ويستغنى عن الشرط (3) لأنه ينتج من (2).

وإذا وجد عنصر و ∋ س بحيث أن وس= س و = س لكل س ∋ س فـإن و يدعى عنصر الجبرية المحايد. وهذا العنصر المحايد وحيد لأنه إذا كان و عنصرا محايدا فان و = و و = و.

وفكرة الاقتران المحافظ والتشاكل في الحلقات والحقول وما إلى ذلك، مشـابهة لنفس الفكرة في الزمر. وما نطلبه بشكل أساسي هو اقتران محـافظ بـين حلقتـين أو حقلين وما إلى ذلك. ثم يعرف التشاكل على أنه اقـتران محـافظ تقـابلي. لهـذا فـإن اقترن ق:س ← س بين حلقتين س،س يعرف على أنه اقتران محافظ إذا وفقـط إذا كـان ق(س+ص)= ق(س)+ ق(ص)، و ق(س • ص)= ق(س) • ق(ص) لكـل س، ص∋ س.

وهذا التعريف نفسه يمكن تطبيقه على الحقول لأن الحقل هـو حالـة خاصـة من الحلقة. وبطريقة مشابهة إذا كان س، س فضائيين خطيين على نفـس الحقـل ح فإن الاقتران ق: س ← س يسمى اقترانا محافظا إذا وفقط إذا كان:

ق(س+ص) = ق(س)+ ق(ص) لكل س، ص ∋ س، (10)

ق(أ س) = أ ق(س) لكل أ ∋ ح ولكل س ∋ س (11)

وفي العادة نجمع (10) و(11) في شرط واحد هو التالي:

ق(أ س+ ب ص)= أ ق (س) = ب ق(ص) لكل أ، ب∋ ح وس، ص ∋ س(12)

والاقتران المحافظ للفضاء الخطي، أي الاقتران الذي يحقق (12)، يسمى عادة اقترانا خطيا (أو مؤثرا خطيا).

وأخيرا إذا كانت س،س جـبريتين علـى نفـس الحقـل ح فـإن ق: س ←س يسمى اقترانا محافظا إذا وفقط إذا كان:

ق(أ س + ب ص) = أ ق (س) + ب ق(ص)

وكذلك ق(س ص) = ق(س) ق(ص) لكل أ،ب ∋ ح ولكل س،ص∋ س.

تمارين (3-1)

في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين.

1- (وحدانية العنصر المحايد والنظير) إذا كان مـ1، مـ2 عنصرين محـايدين في (ز،*) فأثبت أن مـ$_1$، مـ$_2$. وإذا كان س ∈ ز، ص ∈ ز بحيث أن س ص =مـ فأثبت أن ص= سَ .

2- لنفرض أن (ز،*) هي زمرة مـع عمليـة الضـرب أي أن س*ص = س•ص= س ص، و سَ= س$^{-1}$. أثبـت أن (س$^{-1}$)$^{-1}$=س و(س ص)$^{-1}$= ص$^{-1}$ س$^{-1}$.
لاحظ أن (س ص)$^{-1}$ ≠ س$^{-1}$ ص$^{-1}$ إلا إذا كانت ز تبديلية.

3- لتكن (ز،*) كما في السؤال (2)، أكتب س^2 لتعني س • س فإذا كان س، ص∈ ز بحيث أن س^2=ص^2 = (س ص)^2 = مـ فأثبت أن س ص = ص س.

4- خذ عددا صحيحا ثابتا، ن ∈ z، وعرف س*ص =س+ص - ن لكـل س،ص ∈ z. أثبت أن (z، *) هي زمرة تبديلية. ما هو العنصر المحايد وما هو سَ ؟

5- لنفـرض أن (ز،*) زمـرة. عـرف عمليـة □ علـى الضـــرب الديكـــارتي ز×ز بـ(أ،ب)□ (جـ،د) = (أ*جـ*د) لكـل أ، ب، جـ،د ∈ ز. أثبـت أن (ز×ز، □) زمرة.

6- لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية، *R مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفـر. عرف على *R × R بـ (أ،ب) * (جـ، د) = (أ جـ، ب جـ +د) وهكذا فـإن أ، جـ عددان غير الصفـر. أثبـت أن (*R ×R، *) هـي زمـرة. مـا هـو العنصـر المحايد؟

أثبت كذلك أن {(1،ب)|ب ∈ R} هي زمرة جزئية من (R× ، *).

7- لتكن س المجموعة {1،2،3} ولتكن س (3) مجموعة اقترانات التقابل من س إلى س وإليك على سبيل المثال عنصرين من عنـاصر س (3) همـا ق$_1$ المعرفـة بــ

ق$_1$(1)=2، ق$_1$(2) = 3، ق$_1$(3)=1) وق$_2$(المعــرف بـــ ق$_2$(1)=3، ق$_2$(2)=1، ق$_2$(2)=2 يمكن التعبير عن ق$_1$، ق$_2$ كما يلي:

$$ق_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad ، \quad ق_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

تسمى عناصر س(3) عادة تبديلات س وتسمى أيضــا (3) الزمـرة المتماثلـة من الدرجة الثالثة. ويوجد في س(3) ستة عناصر، أي أنها مجموعة من الرتبة 6.

وهذا العناصر هي ق$_1$، ق$_2$ أعلاه و:

$$ق_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad ، \quad ق_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$ق_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad ، \quad ق_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

نعرف العملية الثنائية على س(3) بتركيب الاقترانات فعلى سبيل المثـال ق$_1$، oق$_2$ (2) = ق$_1$(2))= ق$_1$(1)=2. أكتب جدول الزمــرة (3).. لاحـظ أنـها ليسـت تبديلية فمثلا ق$_3$، o ق$_1$= ق$_4$ ولكن ق$_1$oق$_3$ =ق$_5$.

8- ليكن: ق(ز،*) ← (ي، □) اقترانا محافظا، فإذا كان مـ هو العنصـر المحـايد في ز فأثبت أن ق(مـ) هو العنصر المحايد في ى.

9- أثبت أن الزمرتين (z،+) ، (و،0) في المثال 34 غير متشاكلين إرشاد: لنفرض أ،ه يوجد تشاكل ق:(z،+) ← (ز،0) فإذن يوجد س،ص ∍ بحيث أن ق(س) = 1، ق(س) =-1. لنـأخذ الآن ن∍ z بحيــث أن ن ≠ z و ن ≠ص. اعتـــبر ق(ن) وتوصل إلى تناقض.

10- أثبت أن (Q^+،0) هي زمرة جزئية من (+R،0).

هل يمكن أن يكون لـ(R^+،0) زمرة جزئية منتهية بخلاف الزمرة {1}.

11- أثبت أنه في أي حلقة صـ س=س صـ=صـ، (-س) ص=س(-ص) = -س ص وكذلك (-س) (-ص) =س ص.

12- [نظرية ذات الحدين]: في أي حلقة أكتب 2س=س+س، 3س=2س+س...الخ. وس^2=س• س، س3=س• س^2... وهكذا، كمثال
(س+ص)^2=(س+ص) س+(س+ص) ص=س^2+ص س+س ص+س ص + ص^2.

إذا كان س ص = ص س فإن (س+ص)^2 = س^2+ 2س ص + ص^2.

$$(\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{1}\text{س}^{\text{ن}-1}\text{ص} + \binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\text{ص}^2 + .. + \text{ص}^{\text{ن}}.$$

حيث ن ∋ N و $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ هي معامل ذات الحدين ويعرف بـ $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!(\text{ن}-\text{ر})!}$

حيث ن!=1 × 2×3...×ن. ونعتبر (0)!= 1. يمكن كتابة نظرية ذات الحدين باستخدام الحرف الإغريقي $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}$ (سيجما) مقلوبا، إشارة للمجموع.

$$(\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}} \text{ص}^{\text{ر}}$$

حيث $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}$ تعني أننا نضع ر = 0، 1، ....، ن بالتتابع ثم نجمع النتائج.

استخدمنا أيضا س$^{\text{ن}-\text{صفر}}$ ص$^{\text{صفر}}$= س$^{\text{ن}}$، و س$^{\text{ن}-\text{ن}}$ ص$^{\text{ن}}$= ص$^{\text{ن}}$

يمكن إثبات نظرية ذات الحدين بطريقة الاستقراء الرياضي على ن وسنشرح هذه الطريقة بالتفصيل فيما بعد.

يمكن إيجاد معاملات ذات الحدين لـ س+ص، (س+ص)^2، (س+ص)^3، (س+ص)^4، (س+ص)^5، ... من الشكل التالي (المعرفة بمثلث باسكال).

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

13- لحلقة المصفوفات 2×2]

لتكن س حلقة لها محايد و. ولنفرض أن م$_2$(س) هي مجموعة المصفوفات من الرتبة 2×2 التي مدخلاتها من س: وكل عنصر أ ∋ م$_2$ (س) هو المصفوفة:

$$أ=\begin{pmatrix} أ_1 & أ_3 \\ أ_3 & أ_4 \end{pmatrix}$$

حيث أ$_1$،أ$_2$،أ$_3$،أ$_4$، ∋ س.

تعرف أ= ب إذا وفقط أ$_ر$= ب$_ر$، ر= 1،2،3،4 ونعرف الجمع على م$_2$(س) بالمصفوفة:

$$أ+ب=\begin{pmatrix} أ+ب_1 & أ_2+ب_2 \\ أ_3+ب_3 & أ_4+ب_4 \end{pmatrix}$$

والضرب على ك$_2$ (س) بالمصفوفة.

$$أب=\begin{pmatrix} أ_1ب_1+أ_3ب_3 & أ_1ب_2+أ_2ب_2 \\ أ_3ب_1+أ_4ب_3 & أ_3ب_3+أ_4ب_4 \end{pmatrix}$$

أثبت أن م$_2$(س) هي حلقة صفرها هو $\begin{pmatrix} صـ & صـ \\ صـ & صـ \end{pmatrix}$

ويدعى بالمصفوفة الصفرية. وعنصرها المحايد هو $\begin{pmatrix} و & صـ \\ صـ & و \end{pmatrix}$

ويدعى المصفوفة الأحادية.

حلقة الأعداد الصحيحة z تبديلية ولكن عند ضرب $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

أثبت أن الحلقة م$_2$(z) غير تبديلية.

14- أثبت أن الحلقة م$_2$(R) (انظر التمرين 13) ليست حقلا. وإذا كانت ع هي المجموعة الجزئية من م$_2$(R) التي تتكون من المصفوفات التي على شكل $\begin{pmatrix} أ & ب \\ -ب & أ \end{pmatrix}$.

حيث أ، ب ∈ R. أثبت أن ع حقل.

اعتبر الاقتران: ϕ ← ع المعرف بـ

ق(س+ت ص)= $\begin{pmatrix} س & ص \\ -ص & س \end{pmatrix}$ وأثبت أن ع متشاكل مع حقل الأعداد المركبة ϕ.

15- لنأخذ المجموعة الجزئية Q $(\sqrt{2})$ من R حيث Q $(\sqrt{2})$= {أ + ب $\sqrt{2}$| أ، ب∈Q}. أثبت أن Q $(\sqrt{2})$ هي حقل تحت عملية الضرب والجمع في R. أي أن Q $(\sqrt{2})$ هي حقل جزئي من R.

16- إذا كان س حقلا جزئيا من Q فأثبت أن Q = س.

17- أثبت ن ∈ N. كما عرفنا من قبل فإن $R^{ن}$ هي مجموعة النونيات الحقيقية المرتبة س= (س$_1$،س$_2$، ...، س$_ن$)حيث س$_ر$ ∈ R وهكذا على سبيل المثال فإن $(\sqrt{2}،\sqrt{3}،....،\sqrt{ن})$ ∈$R^{ن}$ لـ س ، ص ∈$R^{ن}$، أ ∈ R عرف

س+ص=(س$_1$+ص$_1$، س$_2$+ص$_2$+ ...+ س$_ن$+ص$_ن$)

أس= (أس$_1$، أس$_2$، ....، أس$_ن$).

تحت هذه العمليات 1+و، أثبت أن Rن هو فضاء خطي حقيقي، أي فضاء خطي على R ما المتجه الصفري هنا وما هو -س؟

18- في التمرين 17: لنفرض أن ن=3، ولنفرض أن أ =(-1،0،2)، ب=(4،5،2).
حل المعادلة 6أ+5س=ب في الفضاء الخطي الحقيقي R^3.

19- عرف ق: 3R ← 3R بـ ق(س) = (س$_2$،-س$_1$، س$_3$) حيث س= (س$_1$،س$_2$، س$_3$). أثبت أن ق تشاكل من الفضاء الخطي R^3 إلى نفسه.

20- باستخدام العمليات المعرفة في التمرين 17 تعرف أن Rن هو فضاء خطي حقيقي. الآن س=(س$_1$،س$_2$، س$_ن$)، ص= (ص$_1$،ص$_2$، ...،ص$_ن$) في $R^{ن}$ عرف الضرب س ص=(س$_1$ص$_1$، س$_2$ ص$_2$، ...، س$_ن$ ص$_ن$).

أثبت أن $R^{ن}$ هي جبرية تبديلية حقيقية ولها عنصر محـايد و[مـا هـو و؟]. إذا كانت ن >1. جد عنصرا س ≠ وفي $R^{ن}$ بحيث أن س ص ≠ ولكل ص ∍ $R^{ن}$.

21- لتكن س جبرية على الحقل ϕ، حيث س ليس لها عنصر محايد. اعتبر الضـرب الديكارتي ص= ϕ×س. أثبت أن ص تصبح فراغـا خطيـا علـى ϕ. إذا أخذنـا التعريف ص+ص= (أ+أ، س+س)، و ب• (أ،س)= (ب أ، ب• س)

حيث ص = (أ، س) ∍ ص، الخ و ب ∍ ϕ

عرف الآن عملية ضرب على ص كما يلي:

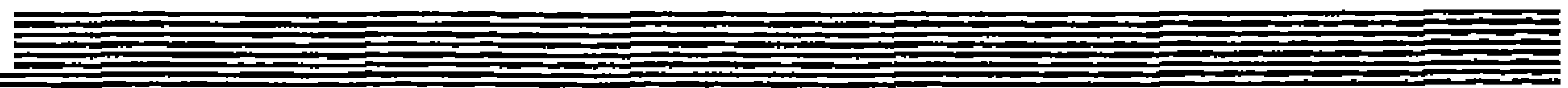
(أ،س) (أ،س) = (أأ، أس+ أس+س س)

أثبت أن ص هي جبرية لها عنصر محايد. و[ما هو و؟]



الفصل الخامس

التقدير



الفصل الخامس

التقدير

مقدمة:

كما نعلم أن الهدف الأساسي من دراسة مجتمع ما هو إيجاد أو تقدير بعض خصائصه مثل المتوسط μ ونس بة وجود ظاهرة معينة في المجتمع p وغير ذلك من أدلة توصيف المجتمعات. وهذه الخصائص تعتبر من أهم المعالم التي تحدد شكل كل مجتمع ولذلك فهي تسمى بمعالم المجتمع Parameters وهي ثوابت لأن قيمتها ثابتة لا تتغير. وهذه المعالم غالباً ما تكون مجهولة ونرغب في معرفة قيمتها.

وحيث إن العينة العشوائية تعتبر صورة مصغرة من المجتمع فإننا نلجأ دائماً إلى حساب ما يقابل معالم المجتمع في العينة وذلك من بيانات العينة والمقياس المحسوب من العينة يسمى إحصاء statistics والاحصاءات المناظرة للمعالم p,σ^2,μ هي الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ وتباين العينة s^2 ونسبة الظاهرة في العينة r على الترتيب.

ويعتبر الإحصاء متغيراً عشوائياً لأنه يتغير من عينة لأخرى. فمثلاً الوسط الحسابي الذي نحصل عليه من عينة ما يختلف عن ذلك الذي نحصل عليه من عينة أخرى لها الحجم نفسه.

وحيث إن الإحصاءات متغيرات عشوائية فلكل منها توزيع احتمالي معين. فمثلاً وجدنا في الباب السابق أن الإحصاء $\bar{x}$ متغير عشوائي له توزيع طبيعي عندما يكون حجم العينة كبيراً.

تقدير النقطة Point Estination :

يمكن استخدام قيمة الا حصاء المحسوب من العينة كتقدير للمعلمة المناظرة له في المجتمع فمثلاً يمكن استخدام الوسط الحسابي $\bar{x}$ المحسوب من عينة حجم n كتقدير لمتوسط المجتمع μ وبالمثل يمكن استخدام تباين العينة s^2 كتقدير لتباين المجتمع σ^2.

وكما نعلم فإنه من بيانات العينة يمكن حساب قيمة وحيدة للاحصاء وهذه القيمة الوحيدة التي تستخدم كتقدير لمعلمة المجتمع تسمى تقدير النقطة. والإحصاء الذي نستخدمه للحصول على تقدير النقطة يسمى مقدراً estimator والقيمة التي نحسبها له من بيانات العينة تسمى تقدير estimate. فمثلاً الوسط الحسابي $\bar{x}$ يعتبر مقدراً estimator لمتوسط المجتمع μ ولكن قيمته التي نحصل عليها من بيانات العينة تعتبر تقديراً estimate لمتوسط المجتمع μ .

وبالطبع فإن العينات المختلفة والتي لها الحجم نفسه سوف تقودنا عادة إلى تقديرات مختلفة، وعلى ذلك فإننا لا نتوقع أن يقوم المقدر بتقدير المعلمة بدون خطأ. فعادة ما يكون هناك فرق بين المعلمة والتقدير، وهذا الفرق يسمى خطأ التقدير. والمقدر الجيد هو الذي يجعل هذا الخطأ مساوياً للصفر أو قريباً منه.

وهناك صفات معينة للمقدار الجيد لن ندخل في تفاصيلها حيث إنها تحتاج إلى مفاهيم إحصائية متقدمة ولكن نذكر باختصار خاصية واحدة فقط لأهميتها وهي: "أن القيمة المتوقعة للتقدير يجب أن تساوي المعلمة".

فمثلاً إذا أخذنا الوسط الحسابي $\bar{x}$ كمقدر للمعلمة μ فيكون $\bar{x}$ مقدراً جيداً إذا كانت:

$$E(\bar{x})=\mu$$

وهذا متحقق للوسط الحسابي $\bar{x}$. وهذا الخاصية تسمى خاصية عدم تحيز المقدر unbiasedness.

فترات الثقة Confidence Interval :

ذكرنا في البند السابق أن مقدر النقطة نادر ما يساوي المعلمة التي نرغب في تقديرها بل إنه في حالة التوزيعات المتصلة نجد أن احتمال حدوث هذا يساوي

صفراً ولذلك فإنه يكون من المرغوب فيه أن نحدد فترة تحتوي على مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع، وتسمى هذه الفترة بفترة الثقة. واحتمال وقوع المعلمة في هذه الفترة يسمى درجة الثقة لأنه يبين درجة ثقتنا بأن المعلمة سوف تقع في هذه الفترة.

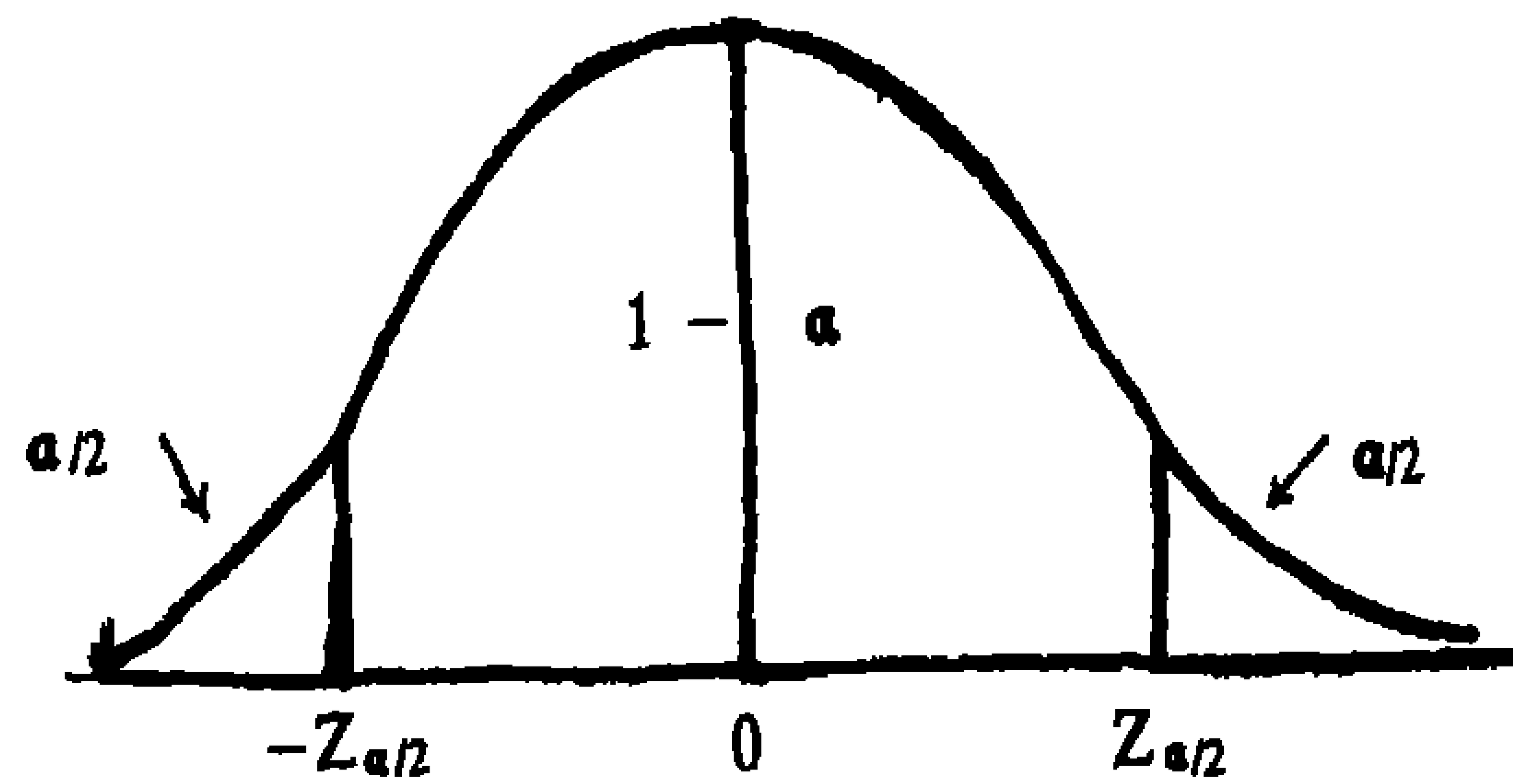
وفيما يلي سنقوم بإيجاد فترات ثقة لمعالم المجتمع المختلفة.

تقدير متوسط المجتمع باستخدام عينات كبيرة:

نفرض أن لدينا مجتمعنا وسطه μ وتباينة σ^2 وكان متوسط هذا المجتمع مجهولاً ونرغب في تقديره فإننا نختار عينة عشوائية كبيرة (حجمها $n \geq 30$) وكما نعلم فإن الإحصاء $\bar{x}$ وهو الوسط الحسابي للعينة يتبع تقريباً توزيعاً طبيعياً وسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$ وذلك من نظرية النهاية المركزية. وفي هذه الحالة يكون المتغير.

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$$

وباعتبار أن $z_{a/2}$ هي قيمة Z التي تكون على يمينها مساحة (تحت المنحنى الطبيعي القياسي) تساوي $a/2$ فإنه (كما يتضح كم الشكل الآتي) يكون:



شكل (7-1)

توزيع المساحة تحت المنحنى الطبيعي القياسي

$$P[-Z_{a/2}<Z<Z_{a/2}]=1-a$$

وبالتعويض عن قيمة Z نحصل على:

$$P\left[-Z_{a/2}<\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z_{a/2}\right]=1-a$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية فإننا نجد أن:

$$P\left[\bar{x}-Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=1-a$$

ويسمى الاحتمال 1-a بدرجة الثقة أما المقداران:

$$\bar{x}\pm Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

فيسميان حدي الثقة. فإذا أدرنا درجة ثقة 95٪ فإن قيمة a=0.05 ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن $Z_{0.025}=1.96$ وبالتالي فإن حدي الثقة يكونا:

$$\bar{x}\pm 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ويمكن باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي تحديد قيمة $Z_{a/2}$ المناظرة لأية درجة ثقة ترغبها.

ملحوظة (1):

عند تقدير μ باستخدام فترات الثقة السابقة نجد أننا نحتاج لمعرفة σ التي عادة ما تكون مجهولة. وحيث إن حجم العينة كبيرة فإنه يمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة s بدلاً من σ كنوع من التقريب.

ملحوظة (2):

إذا كان المجتمع محدداً وحجمه N فإننا نستبدل الانحراف المعياري للوسط الحسابي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ يناظره في حالة المجتمعات المحدودة وهو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ وفي هذا الحالة يكون حداً فترة الثقة هما:

$$\bar{x} \pm Z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال (1):

مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية. اختيرت من إنتاجه عينة عشوائية حجمها 100 مصباح فإذا كان متوسط عمر المصباح في العينة هو 1200 ساعة وانحرافه المعياري هو 250 ساعة. فماذا نستنتج عن متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع كله؟

الحل:

$\bar{x} = 1200$, $s = 250$, $n=100$

نفرض أن أن μ هي متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع. فإذا كانت درجة الثقة المطلوبة هي 95% فإن 0.05 =\ a وتكون:

$Z_{a/2} = Z0.025 = 1.96$

ويكون حداً فترة الثقة هما:

$$\bar{x} \pm Z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وحيث إن σ مجهولة فإننا نستخدم s بدلاً منها. وبالتعويض نحصل على:

$$1200 \pm 1.96 \times \frac{250}{\sqrt{100}}$$

أي أن:

$$1200-49 < \mu < 1200 + 49$$

$$1151 < \mu < 1249$$

بدرجة ثقة 95%

ومعنى هذا أننا نتوقع أن يتراوح عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع بين 1151 ساعة و 1249 ساعة وأن درجة ثقتنا في هذه النتيجة هي 95%.

مثال (2):

اختيرت عينة عشوائية حجمـها 50 طالبـاً مـن طـلاب كليـة العلـوم البـالغ عددهم 1000 طالب. فإذا كان متوسط عمر الطالب في العينة 20 سـنة والانحـراف المعياري 3 سنوات فأوجد بدرجة ثقة 99% متوسط عمر الطالب في الكلية.

الحل:

$\bar{x}=20 \quad , s=3 \quad , N=1000 \quad , n=50$

وحيث إن المجتمع محدود فإن حدي الثقة هما:

$$\bar{x}\pm 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

وحيث إن σ مجهولة فإننا نستخدم s بدلاً منها. وبالتعويض نحصل على:

$$20\pm 2.58\times\sqrt{50}\times\sqrt{\frac{100-50}{1000-1}}$$

أي أن

$0\text{-}1.07 < \mu < 20 + 1.07$

$18.93 < \mu < 21.07$

بدرجة ثقة 99%

ومعنى هذا أن متوسط عمر الطـالب في الكليـة يـتراوح بـين 18.93 سـنة و 21.07 سنة وذلك بدرجة ثقة 99%.

مثال (3):

اختيرت عينة من 70 نباتا مـن أحـد أنـواع النباتـات و كـان توزيـع أطوالهـا بالسنتيمتر كما يلي:

فئات الطول بالسنتيمتر :	17–	19–	21–	23–	25–	27–

5	7	18	25	12	3	: عدد النباتات

والمطلوب تقدير متوسط طول النبات من هذا النوع بدرج ثقة 99%.

الحل:

نبدأ أولاً بحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري من بيانات العينة فنجد أن:

$$n = 70 \quad , \quad \sum f_1 x_1 = 1598 \quad , \quad \sum f_1 x_1^2 = 36892$$

ومنها نجد أن:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum f_1 x_1 = \frac{1598}{70} = 22.83$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_1 x_1^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{36892}{70} - (22.83)^2} = 2.41$$

ويكون حدا الثقة هما:

$$\bar{x} \pm 2.58 \times \frac{\sigma}{n}$$

وحيث إن σ مجهولة فإننا نستخدم s بدلاً منها. وبالتعويض نحصل على:

$$22.83 \pm 2.58 \times \frac{2.41}{\sqrt{70}}$$

أي أن

$$22.83 - 0.74 < \mu < 22.83 + 0.74$$

$$22.09 < \mu < 23.57$$

أي أننا نتوقع أن ينحصر متوسط طول النبات بين 22.09 سنتيمتر و 23.57 سنتيمتر بدرجة ثقة 99%.

تقدير متوسط المجتمع باستخدام عينات صغيرة:

تناولنا في البند السابق تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة عن طريق فترة ثقة وذكرنا انه إذا كان لدينا مجتمع ما متوسط μ وتباينه σ^2 وأخذنا منه عينة كبيرة حجمها n ووسطها $\bar{x}$ وتباينها s^2 فإن الوسط الحسابي $\bar{x}$ يتبع تقريباً طبيعياً وسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$ أي أن:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

قد استخدمنا هذه النتيجة الهامة في إيجاد تقدير لمتوسط المجتمع μ. ولكن في كثير من الدراسات يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولاً لذلك فإننا نستعيض عنه تباين العينة s^2 وفي هذه الحالة يظل المتغير.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

طالما كان حجم العينة كبيراً.

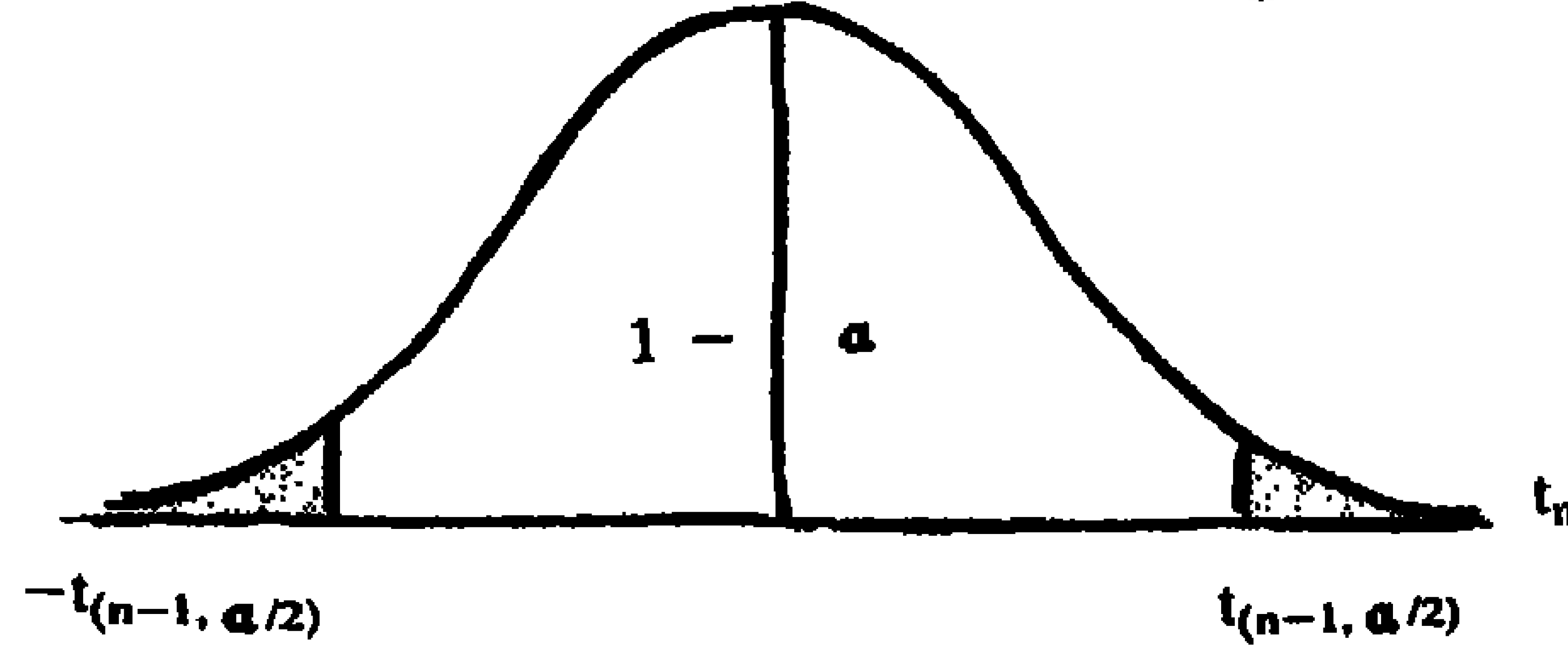
أما في حالة العينات الصغيرة $(n < 30)$ وكان المجتمع الذي اختيرت منه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه μ وتباينه σ^2 وفي حالة ما إذا كانت σ معلومة فإن الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$ أي أن المتغير.

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

أما في حالة ما إذا كانت σ مجهولة فإننا نستخدم الانحراف المعياري للعينة s بدلاً منها وفي هذه الحالة يكون الاحصاء $\frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ له توزيع t بدرجات حرية $v = n-1$.

وعلى ذلك تكون أساليب تحليل نتائج العينات الصغيرة هي أساليب تحليل نتائج العينات الكبيرة نفسها مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي Z بالمتغير $t_{(n-1)}$.

وعلى ذلك فإنه (كما يتضح من الشكل الآتي) يكون:



شكل (7–2)

توزيع المساحة تحت منحنى توزيع t

$$P\,[-t_{(n-1,\,a/2)} < t_{(n-1)} < t_{(n-1,a/2)}\,] = 1\text{-}a$$

حيث $t_{(n-1,a/2)}$ هي قيمة t التي تكون على يمينها مساحة (تحت منحنى t بدرجات حرية (n-1) تساوي a/2 وبالتعويض عن قيمة $t_{(n-1)}$ بالإحصاء $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ فإننا نحصل على:

$$P\,[-t_{(n-1,\,a/2)} < \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{(n-1,a/2)}\,] = 1\text{-}a$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية فإننا نجد أن:

$$P\,[\bar{x} - t_{(n-1,\,a/2)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(n-1,a/2)} \frac{s}{\sqrt{n}}\,] = 1\text{-}a$$

أي أن حدي فترة الثقة هما:

$$\bar{x} \pm t_{(n-1.a/2)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة (3):

عندما يكون حجم العينة كبيراً فإن:

$$s^2 = \frac{1}{2}\sum(x_1 - x)^2 = \frac{1}{n}\sum x_1^2 - \bar{x}^2$$

أما في حالة العينات الصغيرة فإن:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_1 - x)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_1^{2-} - n\bar{x}^2\right]$$

وذل لأسباب إحصائية لا نريد التعرض لها الان.

مثال (4):

إذا كانت أجور عمال أحد المصانع تتبع توزيعاً طبيعياً. واختيرت عينة عشوائية مكونة من 25 عاملاً من هذا المصنع فوجد أن متوسط أجرهم الشهري 4250 ريالاً والانحراف المعياري 400 ريال. والمطلوب إيجاد فترة ثقة لمتوسط الأجر الشهري لعمال هذا المصنع وذلك بدرجة ثقة 95%.

الحل:

إذا كانت μ هي متوسط الأجر الشهري لعمال هذا المصنع ومن بيانات المثال نجد أن:

$$n = 25 \quad , \quad \bar{x} = 4250 \quad , \quad s = 400$$

وحيث إن المجتمع الأصلي له توزيع طبيعي فإن حدي فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ هما:

$$\bar{x} \pm t_{(n-1.a/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ودرجة الثقة هي 95% وبالتالي من جدول توزيع t عند درجات حرية.

$$\nu = n=1 = 25 - 1 = 24$$

نجد أن:

$$t_{(n-1.a/2)} = t_{(24.\ 0.025)} = 2.064$$

وبالتعويض نحصل على حدي فترة الثقة فتكون:

$$4250 \pm 2.064 \times \frac{400}{\sqrt{25}}$$

أي أن

$$4250-165.12 < \mu < 4250 + 165.12$$

$$4084 < \mu < 4415.12$$

ومن هذا يمكن القول أن متوسط الأجر الشهري لعمال هذا المصنع يتراوح بين 4084.88 ريال و 4415.12 ريال وذلك بدرجة ثقة 95%.

ومما سبق يتضح لنا عدم وجود أي اختلاف في خطوات تقدير متوسط المجتمع بفترة ثقة سواء من بيانات عينة كبيرة إلا في استبدال المتغير الطبيعي القياسي Z بالمتغير t .

تقدير تباين المجتمع باستخدام بيانات عينة:

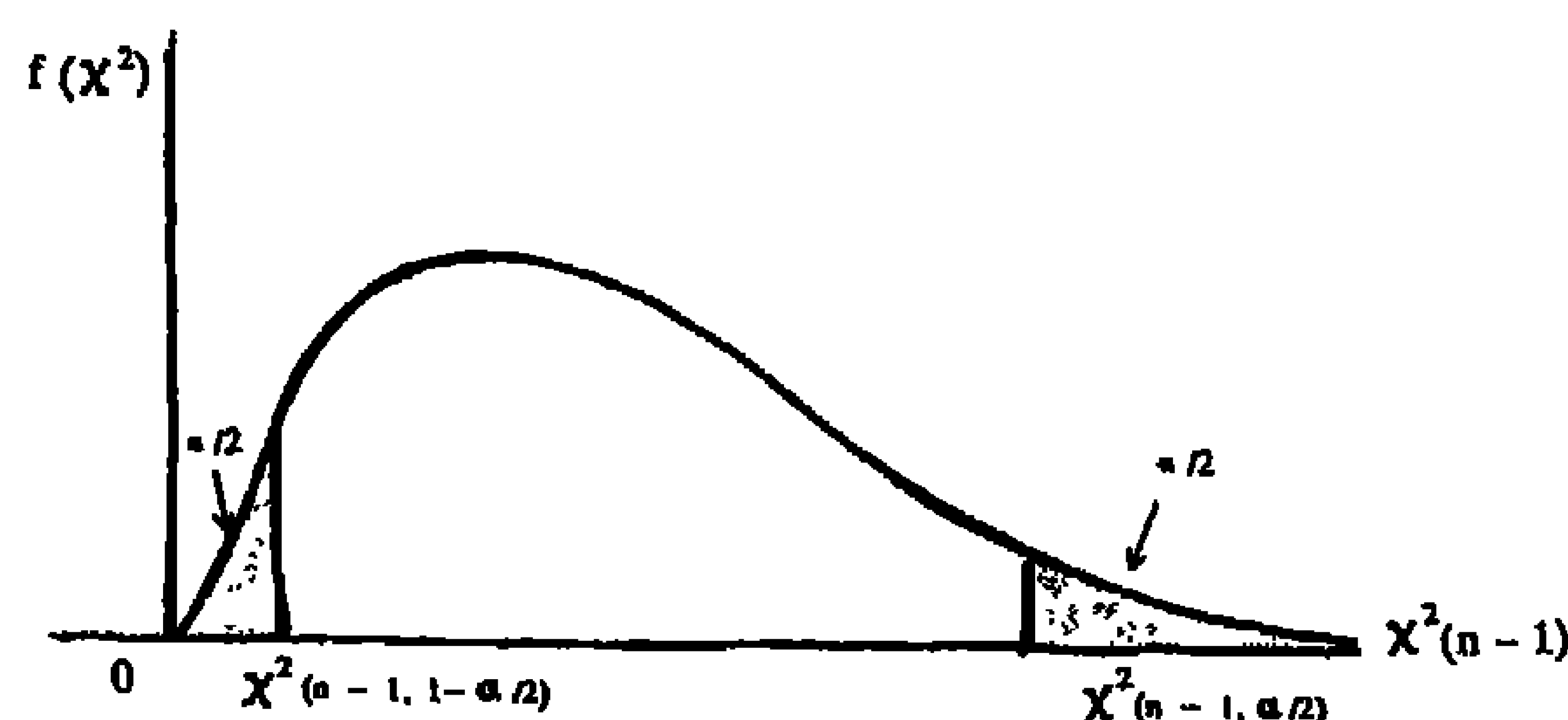
في بعض الحالات نجد أنفسنا بحاجة إلى معرفة تباين σ^2 وكثيراً ما يكون هذا التباين مجهولاً لذلك فإننا نلجأ إلى بيانات العينة لتقدير تباين المجتمع. فمثلاً عند تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة استخدمنا تباين العينة s^2 كتقدير لتباين المجتمع σ^2 وهذا التقدير يسمى تقدير النقطة- أي أننا من بيانات العينة يمكننا الحصول على قيمة عددية وحيدة لتباين العينة s^2 واعتبرناها تقديراً لتباين المجتمع. والآن نرغب في إيجاد فترة ثقة لتباين المجتمع σ^2 كما فعلنا في حالة المتوسط. وفي الباب السابق ذكرنا أنه إذا اخترنا عينة حجمها n من مجتمع له توزيع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن الإحصاء $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ يعتبر متغيراً عشوائياً يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية $v = n-1$ أي أن:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma} - x^2{}_{(n-1)}$$

حيث

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_1 - \bar{x}\right)^2$$

وبالتالي



شكل (7-3)

توزيع المساحة تحت منحنى توزيع مربع كاي

$$P\left[x^2_{(n-1.1-a)} < x^2_{(n-1)} < x^2_{(n-1.a/2)}\right] = 1-a$$

وبالتعويض عن $x^2_{(n-1)}$ فإننا نجد أن:

$$P\left[x^2_{(n-1.1-a/2)} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < x^2_{(n-1.a/2)}\right] = 1-a$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على:

$$P\left[\frac{(n-1)s^2}{x^2_{(n-1\,a/2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x^2_{(n-1.1-a/2)}}\right] = 1-a$$

وبالتالي فإن فترة الثقة تكون:

$$\frac{(n-1)s^2}{x^2_{(n-1\,a/2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x^2_{(n-1,\ 1-a/2)}}$$

بدرجة ثقة % (1-a)

ومن النتيجة السابقة يمكن الحصول على فترة ثقة للانحراف المعيـاري لمجتمـع وهي:

$$\frac{s\sqrt{n-1}}{\sqrt{x^2_{(n-1\,a/2)}}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sqrt{x^2_{(n-1.1-*a/2)}}}$$

بدرجة ثقة ٪ (1-a)

وتسمى فترة الثقة السابقة بفترة ثقة مركزية بمعنى أن المساحة a تنقسم إلى قسمين متساويين a/2 في الطرف الأيمن من منحنى توزيع مربع كاي a/2 في الطرف الأيسر كما هو موضح في شكل حيث نجد أن المساحتين المظللتين متساويتان وكل منهما تساوي a/2.

مثال (5):

إذا كانت أوزان طلاب إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً. اختيرت عينة حجمها 16 طالباً من هذه المدرسة فكانت أوزانهم بالكيلو جرام كما يلي:

40	45	50	42.5	43	46	52.2	51
46.1	44	50.2	45	46	50	40.5	48

أوجد فترة ثقة لتباين أوزان طلاب هذه المدرسة كلها وذلك باستخدام درجتي ثقة 95% و 99% .

الحل:

من بيانات العينة يتبين لنا أن:

$$n=16 \quad , \quad \sum_1 x_i = 739.5 \quad , \quad \sum x_1^2 = 3438859$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{739.5}{16} = 46.22$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} = \left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{15}\left[34388.59 - (16)(46.22)^2\right] = 13.865$$

وحيث إن n=16 فتكون درجات الحرية 15= 1−16 = v = n −1 وباستخدام درجة ثقة 95% فإن:

$$x^2_{(n-1, 1, a/2)} = x^2_{(15.0.025)} = 27.4884$$
$$x^2_{(n-1.1-a/2)} = x^2_{(15.0975)} = 6.26214$$

وبالتالي تكون فترة الثقة هي:

$$\frac{(15)(13.865)}{27.4884} < \sigma^2 < \frac{(15)(13.865)}{6.26214}$$
$$7.5659 < \sigma^2 < 33.2115$$

أي أن تباين المجتمع يتراوح بين 7.5659 ، و 33.2115 وذلك بدرجة ثقة 95% وإذا أردنا إيجاد فترة ثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ فنجدها.

$$2.751 < \sigma < 5.763$$

وفي حالة استخدام درجة ثقة 99% فإن:

$$x^2_{(n-1, 1-a/2)} = x^2_{(15.0.025)} = 32.8013$$
$$x^2_{(n-1, 1-a/2)} = x^2_{(15.0.995)} = 4.60094$$

وبالتالي تكون فترة الثقة هي:

$$\frac{(15)(13.865)}{32.8013} < \sigma^2 < \frac{(15)(13.865)}{4.60094}$$
$$6.3404 < \sigma^2 < 45.2027$$

أي أن تباين المجتمع يتراوح بين 6.3404 و 45.2027 وذلك بدرجة ثقة 99% وإذا أردنا إيجاد فترة ثقة للانحراف المعياري للمجتمع س فنجدها:

$$2.518 < \sigma < 6.723$$

ونلاحظ أنه كلما زادت درجة الثقة كلما اتسعت فترة الثقة.

تقدير نسبة وجود صفة معينة في مجتمع:

يكون من المرغوب فيه أحياناً معرفة نسبة وجود صفة معينة في مجتمع ما مثل نسبة الأميين في مدينة كبيرة. أو نسبه المصابين بمرض معين أو نسبة العاطلين في الدولة وهكذا. في هذه الحالة يمكن استخدام بيانات العينة لتقدير هذه النسبة في

المجتمع. ولإيضاح ذلك سنرمز للنسبة في المجتمع بالرمز p والنسبة المحسوبة من العينة بالرمز r. ومن الباب السابق نظرية (6-5) نعلم أن r تتبع تقريباً توزيعاً طبيعياً وسطه p وتباينه $\frac{p(1-p)}{n}$ وذلك في حالة العينات الكبيرة أي أن:

$$Z=\frac{r-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\approx N(0,1)$$

وحيث إن النسبة p عادة ما تكون مجهولة لذلك فعند حساب الانحراف المعياري للنسبة r نستخدم النسبة r بدلاً من p وعلى ذلك فإن:

$$Z=\frac{r-p}{\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}}\approx N(0,1)$$

وعلى هذا فإنه بإتباع الخطوات نفسها المتبعة في الحالات السابقة نجد أن:

$$p\left[r-Z_{a/2}\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}<p<r+Z_{a/2}\sqrt{\frac{r(n-r)}{n}}\right]=1-a$$

حيث $Z_{a/2}$ هي قيمة المتغير الطبيعي القياسي السابق تعريفها، وبالتالي يكون حداً فترة الثقة هما:

$$r\pm Z_{a/2}\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

ودرجة الثقة هي % (1-a).

مثال (6):

اختيرت عينة عشوائية حجمها 500 حذاء من إنتاج مصنع لإنتاج الأحذية فوجد أن من بينها 100 حذاء معيباً. أوجد بفترة نسبة الأحذية المعينة في الإنتاج كله.

الحل:

عند درجة ثقة 95% تكون :

$$Z_{a/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

ونسبة التالف في العينة هو:

$$r = \frac{100}{500} = 0.2$$

وحدا فترة الثقة لنسبة الأحذية المعيبة في إنتاج المصنع هما:

$$r \pm Z_{a/z}\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

وبالتعويض نجد أن حدي فترة الثقة هما:

$$0.2 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{500}}$$

أي أن:

$$0.2 - 0.035 < p < 0.2 + 0.35$$
$$0.165 < p < 0.235$$

أي أن نسبة الأحذية المعيبة في إنتاج هذا المصنع تتراوح بين 16.5% ، 235% وذلك بدرجة ثقة 95%.

ملحوظة (4):

عندما نقول إن درجة الثقة في نتيجة معينة 95% فإن ذلك يعني أن 95% من العينات العشوائية المختارة من المجتمع الأصلي تعطي مثل هذه النتيجة.

تمارين

1- مصنع ينتج قضباناً حديدية. اختيرت عينة مكونة من 150 قضيباً من إنتاج هـذا المصنع، وقيست أطوالها كما يلي:

الطول بالمليمتر :	980-	990-	1000-	1010-	1020-	1030-
عدد القضبان :	19	32	51	25	14	9

أ) قدر متوسط طول القضيب في إنتاج هذا المصنع كله بدرجة ثقة 95%.

ب) قدرت نسبة القضبان التي تبلغ أطوالها 1020 ملليمتراً أو أكثر في إنتاج هـذا المصنع بدرجة ثقة 99%.

2- اختيرت 100 سيجارة من نوع معين فكان متوسط النيكوتين فيها 26 ملليجراما والانحراف المعياري هو 6 ملليجرامات. أوجد فترة ثقـة لمتوسـط النيكوتـين في السجائر من هذا النوع بدرجة ثقة 99%.

3- أراد أحد مكاتب الاستقصاء معرفة نسبة الأصوات التي تؤيد مرشـحاً معينـاً في الانتخابات. اختيرت عينة من 100 فرد فوجد أن من بينـهم 55 فـرداً يؤيـدون هذا المرشح. فماذا يمكن أن يستنتج هذا المكتب عن فرصة هذا المرشـح للفـوز في الانتخابات وذلك إذا كانت درجة الثقة المطلوبة هي 95%.

4- مصنع ينتج مصابيح كهربائية. فإذا كـانت أعمـار هـذه المصـابيح تتبـع توزيعـاً طبيعياً. اختيرت عينة مكونة من عشرة مصابيح فوجـد أن الانحـراف المعيـاري لعمر المصباح في العينة هو 120 ساعة. قدر بفترة ثقة الانحراف المعيـاري لعمـر المصباح المنتج بواسطة هذا المصنع وذلك باستخدام درجتي ثقة 95% ، 99%.

5- حل التمرين السابق إذا كان حجم العينة 25 مصباحاً والانحراف المعياري كمـا هو 120 ساعة.

6- إذا كان ضغط الدم لمجموعة من الأفراد يتبع توزيعاً طبيعياً، واختيرت عينة عشوائية من بينهم حجمها 10 أفراد فكان ضغط الدم لمفردات هذه العينة كما يلي:

100	95	96	110	120
110	98	100	90	110

استخدم هذه البيانات لإيجاد:

أ) فترة ثقة لمتوسط ضغط الدم للمجموعة كلها عنه درجة ثقة 95%.

ب) فترة ثقة لتباين ضغط الدم للمجموعة كلها عند درجة ثقة 99%.



الفصل السادس

الانحدار والتباعد والالتفاف

الفصل السادس

الانحدار والتباعد والالتفاف

التفاضل للمتجه (ديل):

نكتب ∇ وتعرف بالمعادلة:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$$

المتجه يمتلك خواص تشابه تلك المتجهات العادية. من المفيد في تعريف ثلاث كميات التي تظهر في التطبيقات العملية المألوفة كالانحدار والتباعد والالتفاف. المعامل ∇ معرف أيضاً بنابلا.

الانحدار:

لتكن $\phi(x,y,z)$ معرفة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة (x,y,z) في منطقة معينة في الفراغ (أي ϕ هي المجال العددي القابل للتفاضل). إذن فإن انحدار ϕ تكتب على صورة $\nabla\phi$ تكتب على صورة $\nabla\phi$ أو انحدار ϕ $(\text{grad}\ \phi)$ معرف بالمعادلة.

$$\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k$$

أن $\nabla\phi$ تعرف مجال متجه.

مركبة $\nabla\phi$ في اتجاه وحدة المتجه a هي $\nabla\phi\, a$ وتسمى التفاضل الاتجاهي للقيمة ϕ في اتجاه a. فيزيائياً هذا هو تغير ϕ عند (x,y,z) في اتجاه a.

التباعد:

ليكن $V(x,y,z) = V1i+V2j+V3k$ معرفة وقابلـة للتفـاضل عنـد كـل نقطـة (x,y,z) في نقطة معينة والفراغ (أي أن V هي مجال المتجـه القـابل للتفـاضـل). إذن تباعد V يكتب على الصور $\nabla.V$ أو $div\ V$ وتعرف بالمعادلة:

$$\nabla.V=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right).\left(V_1i+V_2j+V_3k\right)$$
$$=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_2}{\partial z}$$

التشابه مع $A.B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ أيضاً لاحظ أن $\nabla.V\neq V.\nabla$

الالتفاف:

إذا كان $V(x,y,z)$ مجال متجه قـابل للتفـاضـل إذن الالتفـاف يكتـب rotV أو curl v و $\nabla \times V$ ويعرف بالمعادلة:

$$\nabla\times V=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial y}k\right)\times\left(V_1i+V_2j+V_3k\right)$$
$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}1-\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}1+\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}$$
$$=\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial}\right)i+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_3}{\partial y}\right)k$$

لاحظ أنه عند فك المحدد فإن العوامل $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ لابـد أن تسـبق V_1,V_2,V_3.

الصيغ المتضمنة ∇ :

إذا كان B و A دوال متجه قابلة للتفاضل Ψ و φ دوال عددية قابلة للتفاضل للموضع (x,y,z) إذن:

(1) $\text{grad}(\phi+\Psi)=\text{grad}\,\phi+\text{grad}\,\Psi$ أو $\nabla(\phi+\Psi)=\nabla\phi+\nabla\Psi$

(2) $\text{div}\,(A+B)=\text{div}\,A+\text{div}\,B$ أو $\nabla.(A+B)=\nabla.A+\nabla.B$

(3) $\text{curl}\,(A+B)=\text{curl}\,A+\text{curl}\,B$ أو $\nabla\times(A+B)=\nabla\times A+\nabla\times B$

(4) $\nabla.(\phi A)=(\nabla\phi).A+\phi(\nabla.A)$

(5) $\nabla\times(\phi A)=(\nabla\phi)\times A+\phi(\nabla\times A)$

(6) $\nabla.(A\times B)=B.(\nabla\times A)-A.(\nabla\times B)$

(7) $\nabla\times(A\times B)=(B.\nabla)A-B(\nabla.A)-(A.\nabla)B+A(\nabla.B)$

(8) $\nabla(A.B)=(B.\nabla)A+(A.\nabla)B+B\times(\nabla\times A)+A\times(\nabla\times B)$

(9) $\nabla.(\nabla.\phi)=\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$

حيث $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ تسمى معامل لابلاس.

(10) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ التفاف الانحدار للقيمة φ تكون صفر .

(11) $\nabla.(\nabla\times A)0$ التفاف التباعد للمتجه A يكون صفر.

(12) $\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla.A)-\nabla^2A$.

في الضيغ من 9-12 افترض أن A, φ لهما مشتقة ثانية جزئية مستمرة.

الثبات:

خذ في الاعتبار نظامي إحداثيات متعامدة (x,y,z) و (x',y',z') شكل 4-1 لهما نفس نقطة الأصل 0 ولكن محاورها تدور بالنسبة لبعضهما البعض.

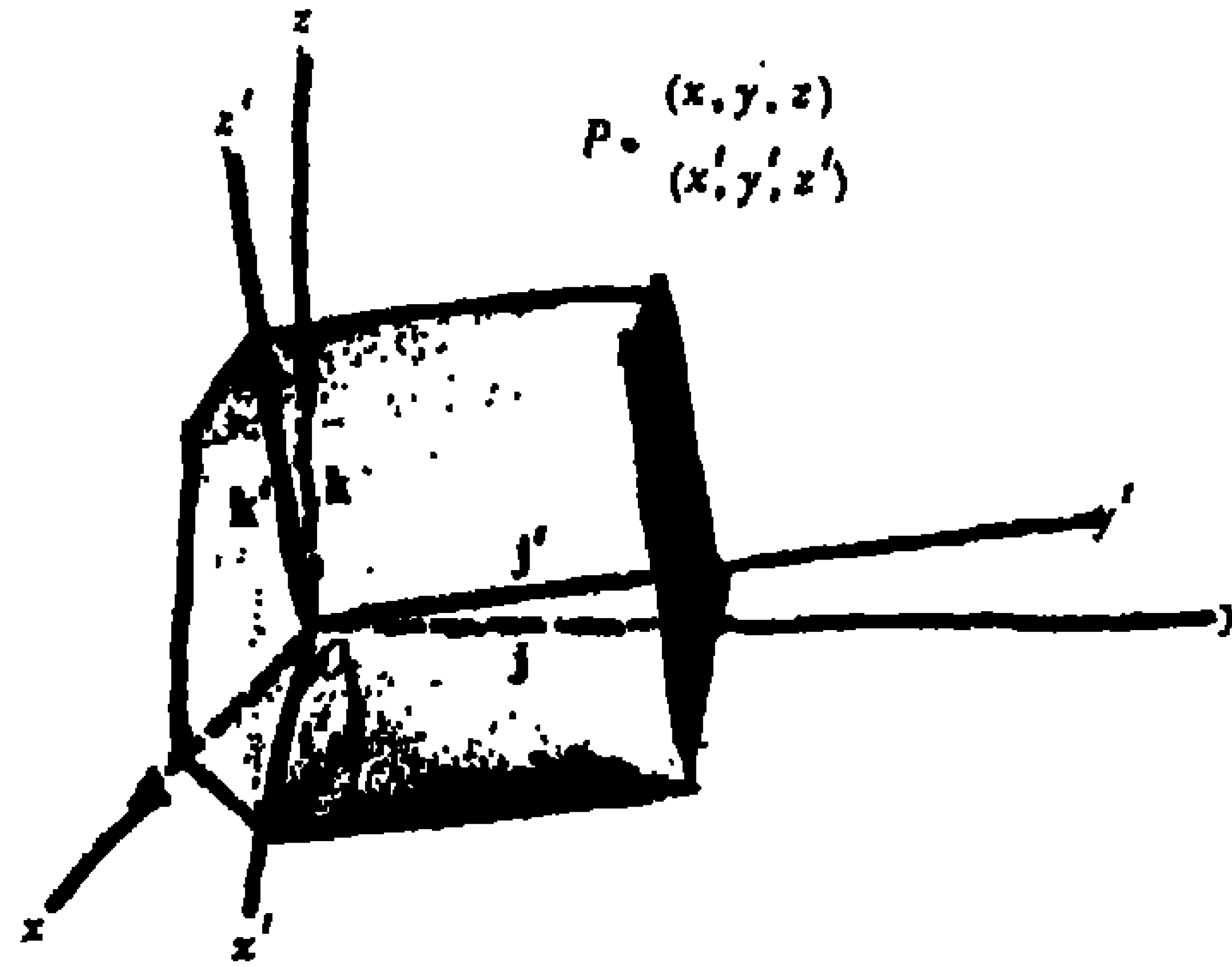
النقطة P في الفراغ لهما الإحداثيات (x,y,z).

أو (x',y',z') بالنسبة لهذين النظامين من الاحداثيات معادلات التحويل بين الاحداثيات أو تحولات الاحداثي تعطى بالمعادلات.

$$
\begin{aligned}
x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\
y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \qquad (1) \\
z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z
\end{aligned}
$$

حيث $l_{jk},\ j,k = 1,2,3$ تمثل اتجاهات جيوب التمام للمحاور x,y,z بالنسبة للمحاور x',y',z' (أنظر مسألة 38). في حالة عدم انطباق نقط الأصل لنظامي الاحداثيات فإن معادلات التحويل تصبح.

$$
(2) \qquad \begin{cases}
x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a'_1 \\
y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a'_2 \\
z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a'_3
\end{cases}
$$



شكل (1-4)

حيث الأصل 0 لنظام الاحداثيات x,y,z تقع عند النقطة (a'_1,a'_2,a'_3) بالنسبة لنظام الاحداثيات x,y,z.

معادلات التحول (1) تمثل التفاف (دوران) نق بينما المعادلات (2) تعرف دوران زائد إزاحة. حركة أي جسم صلب له تأثير إزاحة بدوران التحول (1) يسمى تحولاً عمودياً. التحول الخطي العام يسمى تحولاً متصلاً (منتسباً).

فيزيائياً دالة النقطة العددية أو المجال العـددي $\phi(x,y,z)$ المحسـوب عنـد نقطـة معينة يجب أن يكون مستقلاً عن احداثيات النقطة. لذلك فإن درجـة الحـرارة عنـد نقطة لا تتوقف (تعتمد) على أن الاحداثيات قد اسـتعملت (x,y,z) أو (x', y',z') إذن إذا كانت $\phi(x,y,z)$ هي درجة الحرارة عند نقطة P التي لها الاحداثيـات (x,y,z) بينما $\phi'(x', y',z')$ هي درجة الحرارة عند نفـس النقطـة P ذات الاحداثيـات (x', y',z') فيجب أن تكون $\phi(x,y,z) = \phi'(x', y',z')$. إذا كـان $\phi(x,y,z) = \phi'(x', y',z')$ حيث x,y,z و x',y',z' تكون مرتبطة بمعـادلات التحـول (1) أو (2) وتسـمى $\phi(x,y,z)$ الثابت بالنسبة إلى التحول. كمثال $x^2+y^2+z^2$ × هي ثابت التحول الدوراني.

(1) حيث $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y;^2 + z'^2$

بـالمثل دالـة نقطـة متجـه أو مجـال متجـه $A(x,y,z)$ تسـمى ثـابت إذا كـان $A(x,y,z) = A(x',y',z')$ ويكون صحيحاً إذا كان:

$$A_1(x,y,z)i+A_2(x,y,z)j+A_3(x,y,z)k=A'_1(x',y',z')i'+A'_2(x',y',z')j'+A'_3(x',y',z')k'$$

أمثلة محلولة

الانحدار:

1- إذا كان $\phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$ if . 1 أوجد $\nabla\phi(\text{or grad}\phi)$ at the point $(1,-2,-1)$

$$\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\left(3x^2y-y^3z^2\right)$$
$$=i\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y-y^3z^2\right)+j\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y-y^3z^2\right)+k\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y-y^3z^2\right)$$
$$=6xyi+\left(3x^2-3y^2z^2\right)j-2y^2zk$$
$$=6(1)(-2)i+\left(3(1)^2-3(-2)^2\right)j-2(-2)^3(-1)k$$
$$=6(1)(-2)i+\left(3(1)^2-3(-2)^2(-1)^2\right)j-2(-2)^3(-1)k$$
$$=-12i-9j-16k$$

2- أثبت (أ) $\nabla(F+G)=\nabla F.\nabla G$ (ب) $\nabla(FG)=F\nabla G+G\nabla F$ حيث G,F هي دوال عددي للتفاضل عند x,y,z .

(أ)

$$\nabla(F+G)=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(F+G)$$
$$=i\frac{\partial}{\partial x}(F+G)+j\frac{\partial}{\partial y}(F+G)+k\frac{\partial}{\partial z}(F+G)$$
$$=i\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial G}{\partial x}+j\frac{\partial F}{\partial y}+j\frac{\partial G}{\partial y}+k\frac{\partial F}{\partial z}+k\frac{\partial G}{\partial x}$$
$$=i\frac{\partial F}{\partial x}+j\frac{\partial F}{\partial y}+k\frac{\partial F}{\partial z}+i\frac{\partial G}{\partial x}+j\frac{\partial G}{\partial y}+k\frac{\partial G}{\partial z}$$
$$=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)F+\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)G=\nabla F+\nabla G$$

(ب)

$$\nabla(FG)=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(FG)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(FG)i+=\frac{\partial}{\partial y}(FG)j+\frac{\partial}{\partial z}(FG)k$$

$$=\left(F\frac{\partial G}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial x}\right)i+\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+G\frac{\partial F}{\partial y}\right)j+\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+G\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$$=F\left(\frac{\partial G}{\partial x}i+\frac{\partial G}{\partial y}j+\frac{\partial G}{\partial z}k\right)+G\left(\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}i+\frac{\partial F}{\partial z}k\right)=F\nabla G+G\nabla F$$

3- أوجد $\nabla\phi \text{ if } (a)\phi=\text{in}|r|,\ (B)\phi=\frac{1}{r}$

(أ)

$r=xi+yj+zk$. Then $|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ and $\phi=\ln|r|=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$$\nabla\phi=\frac{1}{2}\nabla\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x^2+y^2+x^2\right)+j\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)+k\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(i\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+j\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+h\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{xi+yj+zk}{x^2+y^2+z^2}=\frac{r}{r^2}$$

(ب)

$$\nabla\phi=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\nabla\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right)$$

$$=i\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}+j\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}k\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$$

$$=i\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\right)+j\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)2y\right)+k\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\right)$$

$$=\frac{-xi-yj-zk}{(x^2+y^2+z^2)}=-\frac{r}{r^2}$$

4- بين أن:

$$\nabla r^n = nr^{n-2}r.$$

$$\nabla r^n=\nabla\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n=\nabla(x^2+y^2+z^2)^{n-2}$$

$$=i\frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2+z^2)^{n-2}\right)+j\frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2+z^2)^{n-2}\right)+k\frac{\partial}{\partial z}\left((x^2+y^2+z^2)^{n-2}\right)$$

$$=i\left(\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n-2-1}2x\right)+j\left(\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n-2-1}2y\right)+k\left(\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n-2-1}2x\right)$$

$$=n(x^2+y^2+z^2)^{n-2-1}(xi+yj+zk)$$

$$=n(r^2)^{n-1}r=nr^{n-2}r$$

لاحظ أنه إذا كان $r = rr_1$ حيث r_1 هي وحدة المتجه في اتجاه r إذن $\nabla r^n = nr^{n-1}r_1$.

5- بين أن $\nabla\phi$ هو متجه عمودي على السطح $\phi(x,y,z)$ حيث c ثابت ليكن $r = xi$ $+ yj + zk$ 12 هو متجه الموضع لأي نقطة $P(x,y,z)$ على السطح إذن:

$dr = dxi + dyj + dzk$ تقع في المستوى المماس للطسح عند P.

ولكن:

$$\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial v}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=0 \text{ or}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial v}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k\right).(dxi+dyj+dzk)=0$$

أي أن $dr=0$، $\nabla\phi$ وبذلك$\nabla\phi$ يكون عموديا على dr وبالتالي على السطح.

6- أوجد الوحدة العمودية للسطح $x^2y + 2xy = 4$ عند النقطة (2,-2,3).

$\nabla(x^2v+2xz)=(2xy+2z)i+x^2j+2xk=-2i+4j+4k$ عند النقطة (2,-2,3)

إذن الوحدة العموية للسطح $=\frac{-2i+4j+4k}{\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(4)^2}}=-\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k=$

وحدة عمودية أخرى هي $\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j-\frac{2}{3}k$ لها اتجاه معاكس للوحدة العمودية الموضحة عالية.

7- أوجد معادلة مستوى المماس للسطح $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ عند النقطة (1,-1,2)

$$\nabla(2xz^2-3xy-4x) = (2x^2-3x-3y-4)j - 3xj + 4xzk$$

إذن العمودي للسطح عند النقطة (1,-1,2) هي $7i - 3j + 8k$ معادلة المستوى المار خلال النقطة التي لها متجه الموضع r_0 ويكون متعامدا على العمود N هو $(r-r_0)$ (انظر الفصل الثاني. مسألة 18) إذن المعادلة المطلوبة هي:

$$[(xi + yj - zk) - (i-j + 2k)]\ (7i -3j + 5k) = 0$$

أو

$$7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0$$

8- ليكن $\rho(x,y,z)$ و $\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ هي درجات الحرارة عند نقطتين متقاربين $P(x,y,z)$ و $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ لمنطقة معينة.

(أ) علل فيزيائيا الكمية $\frac{\Delta\phi}{\Delta s}=\frac{\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-\phi(x,y,z)}{\Delta z}$ حيث Δs هي المسافة بين النقطتين $P\ \phi$.

(ب) احسب $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}=\frac{d\phi}{ds}$ أو علل فيزيائيا.

(جـ) بين أن $\frac{d\phi}{ds}=\nabla\phi.\frac{dr}{ds}$

(أ) حيث $\Delta\phi$ هي التغير في درجة الحرارة بين نقطتين P و Q و Δs هي المسافة بين هاتين النقطتين، وتمثل $\Delta\phi/\Delta s$ متوسط معدل تغير درجة الحرارة لكل وحدة مسافة في الاتجاه من P إلى Q.

(ب) من حساب التفاضل والتكامل:

$\Delta\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta y+\frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z+$ رتب متناهية الصفر أعلى من $\Delta x, \Delta y$ و Δz

إذن $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}$

أو $\frac{\partial\phi}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{ds}\frac{dz}{ds}$

$d\phi/ds$ يمثل معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة للمسافة عند النقطة P في اتجاه نحو النقطة Q. هذه أيضا تسمى المشتقات الاتجاهية للكمية ϕ .

(أ)

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dy}{ds}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial x}j+\frac{\partial\phi}{\partial x}k\right).\left(\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j=\frac{dz}{ds}k\right)$$

$$=\nabla\phi.\frac{dr}{ds}$$

لاحظ حيث أن dr/ds هي وحدة المتجه dr/ds، $\Delta\phi$ هي مركبة $\nabla\phi$ في اتجاه وحدة المتجه هذا.

9- بين أن أكبر معدل لتغير ϕ. أي أن أكبر المشتقات الاتجاهية. تأخذ اتجاه وقيمة المتجه $\nabla\phi$.

من المسألة (8جـ) $d\phi/ds=\Delta\phi.dr/ds$ هو إسقاط $\Delta\phi$ ي اتجاه dr/ds. هذا الاسقاط يكون أكبر ما يمكن عندما $dr/ds, \Delta\phi$ يكون لهما نفس الاتجاه. إذن أكبر قيمة لـ $d\phi/ds$ تكون في اتجاه $\nabla\phi$ وقيمتها هي $|\nabla\phi|$.

10- أوجد المشتقة الاتجاهية للكمية $\phi=x^2yz+4xz^2$ عند $(1,-2,-1)$ في اتجاه $2i-j-2k$.

$$\nabla\phi=\nabla(x^2yz+4xz^2)=(2xyz+4z^2)i+x^2zj+(x^2yj+(x^2y+8xz)k$$

$$=8i-j-10k \quad \text{عند} \quad (1,-2,-1).$$

وحدة المتجه في اتجاه $2i-j-2k$ هو :

$$a=\frac{2i-j-2k}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k$$

إذا المشتقة الاتجاهية المطلوبة هي:

$$\nabla\phi.a=(8i-j-10k)+\left(\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k\right)=\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{20}{3}=\frac{37}{3}$$

حيث تكون موجبة و ϕ تتزايد في هذا الاتجاه.

11- (أ) في أي اتجاه من النقطة (2,1,-1) تكون المشتقة للكمية $\phi=x^2yz^2$ أكبر ما يمكن؟

(ب) ما هي القيمة الكبرى؟

$\nabla\phi=\nabla(x^2y^2z) = 2xyz^3\, i + x^2\, z^3\, j + 3x^2yz^2k$

$= - 4i - 4j + 12k$ at (2,1,-1

إذن باستخدام المسألة 9.

(أ) تكون المشتقة الاتجاهية أكبر ما يمكن في الاتجاه $\nabla\phi==-4i-4j+12k$.

(ب) هذه القيمة الكبرى هو:

$$|\nabla\phi|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(12)^2}=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$$

12- أوجد الزاوية بين السطحين $z=x^2+y^2+3$ و $x^2+y^2+z^2 = 9$ عند النقطة (2,-1,2)

الزاوية بين السطوح عند النقطة هي الزاوية بين الأعمدة للأسطح عند النقطة.

$x^2+y^2+z^2 = 9$ at (2,-1,2)

$\nabla\phi= \nabla(x^2+y^2+z^2) = 2xi + 2yj +2zk = 4i -2j + 4k$

$z = x^2+y^2-3$ or $x^2 + y^2 - z = 3$ at (2,-1,2) العمودي للكمية

$\nabla\phi_1=\nabla(x^2+y^2+z^2) = 2xi + 2xj+2zk = 4i - 2j + 4k$ يكون

$z = x^2+y^2-3$ or $x^2 + y^2 - z = 3$ at (2,-1,2) العمودي للكمية

$\nabla\phi_2=\nabla(x^2+y^2-z^2) = 2xi + 2xj- k = 4i - 2j + k$ يكون

$(\nabla\phi_1).(\nabla\phi_2) = |\nabla\phi_1|\,|\nabla\phi_2| \cos\theta$

حيث θ هي الزاوية المطلوبة. إذن :

$$(4i-2j+4k) . (4i-2jk) = |4i-2j+4k| \, |+4i-2j-k| \cos\theta$$

$$16+4-4=\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(4)^2}\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(-1)^2}$$

و $\cos\theta \frac{16}{6\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{63}=0.5819$ حينئذ الزاوية الحادة هي:

$$\theta = \arccos 0.5819 = 54^\circ 25'$$

13- لتكن R هي المسافة من نقطة ثابتة A(a,b,c) إلى أي نقطة P(x,y,z). بين أن ∇R هي وحدة المتجه في اتجاه AP = R.

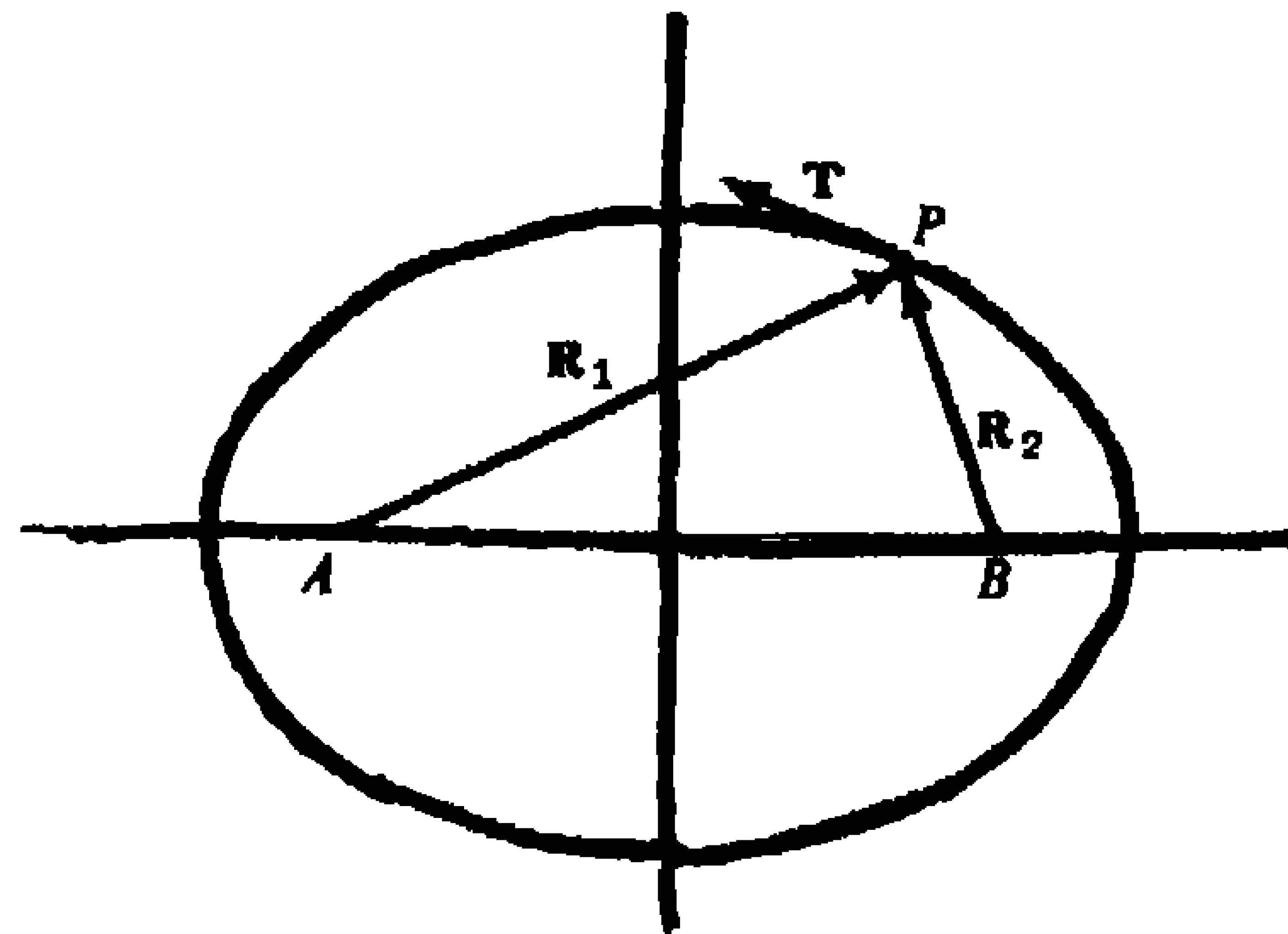
إذا كان r_R و r_P هي متجهات الموضع xi + yj + zk و ai + bj + ck لكل من P و A على الترتيب. إذن $R = r_p - r_A = (x-a)\,i + (y-b)\,j + (z-c)k$

بحيث أن $R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ إذن

$$\nabla R=\nabla\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right)=\frac{(x-a)i+(y-b)j+(z-c)k}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{R}{R}$$

يكون وحدة المتجه في اتجاه R.

14- لتكن P. أي نقطة على القطع الناقص الذي بؤرتاه عند النقطتين B وA شكل (1-2) أثبت أن الخطين AP و BP يصنعان زوايا متساوية مع المماس للقطع الناقص عند P.



شكل (1-2)

ليكن $R_1=AP$, $R_2=BP$ تبين المتجهات المرسومة من البؤرة A وكذلك B على الترتيب إلى النقطة P الواقعة على الناقص. وليكن T وحدة المماس للقطع الناقص عند P.

حيث أن القطع الناقص هو المحل الهندسي لكل النقط P التي مجموع مسافاته من النقطتين الثابتين A وB تكون ثابت P، ونرى أن معادلة القطع الناقص تكون. $R_1+R_2 = P$.

من المسألة (5)، العمود على القطع الناقص هو $\nabla(R_1+R_2)$ وبالتالي :

$$[\nabla(R_1+R_2)].T=0 \text{ or } (\nabla R_2).T=-(\nabla R_3).T$$

حيث $\nabla R_2, \nabla R_1$ هي وحدة المتجهات في اتجاه R_2, R_2 على الترتيب مسألة (13)، حيث تمام الزاوية بين $T, \nabla R_2$ تساوي جيب تمام الزاوية بين $-T, \nabla R_1$

وبالتالي فالزوايا نفسها متساوية. المسألة لها تعليل فيزيائي. أشعة الضوء (أو الموجات الضوئية) منبعثة من البؤرة A على سبيل المثال سوف تنعكس من القطع الناقص إلى البؤرة B.

التباعد:

15- إذا كان $A = x^2zi - 2y^2z^2 j + xy^2zk$ أوجد $\nabla.A($ or div $A)$ عند النقطة $(1,-1,1)$.

$$\nabla.A=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial x}k\right).\left(x^2zi-2y^3z^2j+xy^2zk\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-2y^3z^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(zy^2z\right)$$

$$=2xz-6y^2z^2+xy^2=2(1)(1)-6(-1)^2(1)^2+(1)(-1)^2=-3 \text{ at } (1,-1,1)$$

16- أعطيت $\phi = 2x^3y^2z^4$ (أ) أوجد $\nabla.\nabla\phi$ (or div grad ϕ)

(ب) بين أن $\nabla.\nabla\phi=\nabla\phi^2$ حيث $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ تبيين عاملا لابلاس

$$\nabla\phi = i\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y^2z^4\right) + j\frac{\partial}{\partial j}\left(2x^3y^2z^4\right) + k\frac{\partial}{\partial z}\left(2x^3y^2z^4\right) \quad (\text{أ})$$

$$= 6x^2y^2z^4\, i + 4x^3yz_4 j + 8x_3y^2z_3\, k$$

إذن :

$$\nabla.\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right).\left(6x^2y^2z^4 i + 4x^2yz^4 j + 7x^3y^2z^3 k\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial}\left(6x^2y^2z^4\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^2yz^4\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(8x^3y^2z^3\right)$$

$$= 12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2x^2$$

(ب)

$$\nabla.\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right).\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \nabla^2\phi$$

17- أثبت أن $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right]$$

$$= 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2y^2-z^2-x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2x^2-x^2-y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

إذن بالجمع

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=0$$

المعادلة $\nabla^2\phi=0$ تسمى معادلة لابلاس. ومنها يظهر أن $\phi = 1/r$ حل هذه المعادلة.

18- أثبت أن (أ) $\nabla.(A+B)=\nabla.A+\nabla.B$

(ب) $\nabla.(\phi A)=(\nabla\phi).A+\phi(\nabla.A)$

(أ) $A=A_1i+A_2j+A_3k \quad , \quad B=B_1i+B_2j+B_3k$

إذن

$$\nabla.(A+B)=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right).[(A_1+B_1)i+(A_2+B_2)j+(A_3+B_3)k)]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(A_1+B_1)+\frac{\partial}{\partial y}(A_2+B_2)+\frac{\partial}{\partial z}(A3+B_3)$$

$$=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}+\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right).(A_1i+A_2j+A_3k)$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right).(B_1i+B_2j|B_3l)$$

$$=\nabla.A+\nabla.B$$

(ب)

$$\nabla.(\phi A)= \nabla.\ (\phi A_1 i+\phi A_2 j+\phi A_3 k)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)\right)$$
$$=\frac{\partial \phi}{\partial x}A_1+\phi+\frac{\partial A_1}{\partial x}A_2+\phi\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial z}A_3+\phi\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial \phi}{\partial x}A_1+\frac{\partial \phi}{\partial y}A_2+\frac{\partial \phi}{\partial z}A_3+\phi\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$$
$$=\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}i+\frac{\partial \phi}{\partial y}j+\frac{\partial \phi}{\partial z}k\right).(A_1 i+A_2 j+A_3 k)+\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right).(A_1 i+A_2 j+A_3 k)$$
$$=(\nabla\phi).A+\phi(\nabla.A)$$

19- أثبت $\nabla.\left(\frac{r}{r^3}\right)=0$ ليكن $\phi=r^{-3}$ و $A=r$ من نتائج مسألة (18ب)

إذن $\nabla.(r^{-3}r)=(\nabla r^{-3}.r)+(r^{-3})\nabla.r$
$$= -3r^{-5}\ r.r + 3r^{-3} = 0$$

استخدم مسألة 4.

20- برهن $\nabla.(U\nabla V-V\nabla U)=U\nabla^2-V\nabla^2U$

من مسألة (18ب) مع

$\phi=U$ و $A=\nabla V.$

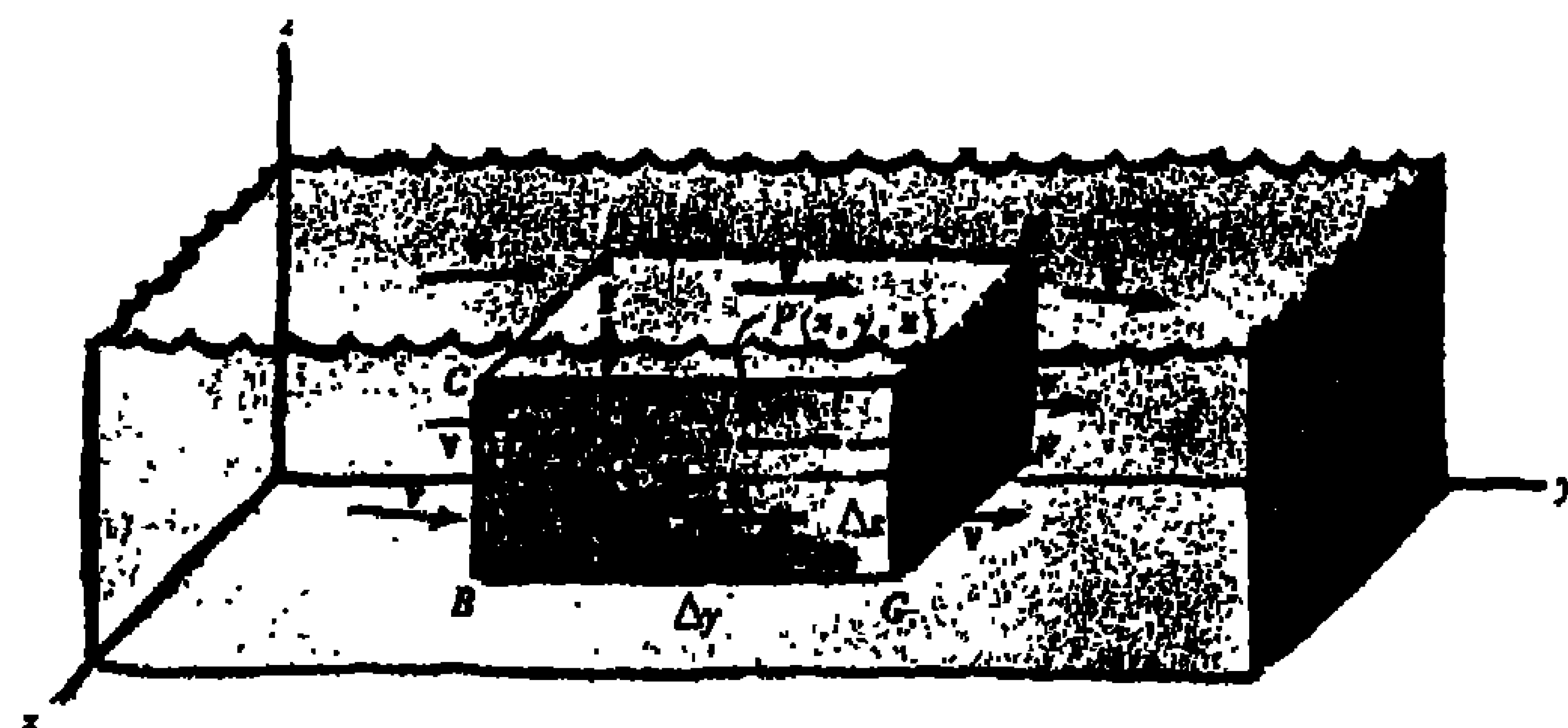
$$\nabla.(U\nabla V)=(\nabla U).(\nabla V)+U(\nabla.\nabla V)=(\nabla U)(\nabla V)+U\nabla^2V$$

يتبادل U وV ينتج $\nabla.(\nabla U)=(\nabla V).(\nabla U)+V\nabla^2U$

إذن بالطرح :

$$\nabla.(U\nabla V)=\nabla.(V\nabla U)=\nabla.(U\nabla V-V\nabla U)$$
$$=(\nabla U)(\nabla V)+U\nabla^2V-[(\nabla V).(\nabla U)+V\nabla^2U]$$
$$=U\nabla^2V-V\nabla^2U$$

21- بائع يتحرك بحيث أن سرعته عند أي نقطة تكوون $v(x,y,z)$. بين أن زيادة السائل لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن في متوازي سطوح صغيرة مركزه عند $P(x,y,z)$ وأحرفه توازي محاور الاحداثيات ولها القيم $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ على الترتيب يعطى تقريبا بالمعادلة $\text{div } v=\Delta . v$.



شكل (3-4)

بالرجوع إلى شكل (3-6)

x مركبة السرعة عند P = $v-$

x مركبة v عند مركز الوجه AFED $=v_1-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta z$ تقريبا

x مركبة v عند مركز الوجه GHCB $=v_1-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta z$ تقريبا

إذن (1) حجم المائع الذي يعبر AFED في وحدة الزمن $=\Delta x\Delta y\Delta z\left(v_1-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right)=$

(2) حجم المائع الذي يعبر GHCB في وحدة الزمن $=\Delta x\Delta y\Delta z\left(v_1-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right)=$

الزيادة في الحجم لكل وحدة زمن في اتجاه x إذن (1) حجم المائع الذي يعبر AFED في وحدة الزمن y $=\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial v_1}{\partial x}=$ (1) - (2) = بالمثل، الزيادة لكل.

وحدة زمن في اتجاه $y=\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial v_1}{\partial x}=$

الزيادة في الحجم لكل وحدة زمن في اتجاه z = $\frac{\partial v_2}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$=

إذن الزيادة الكلية في الحجم لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن =

$$=\frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}=\text{div}\,v=\nabla.v$$

هذه صحيحة فقط في النهاية الذي ينكمــش متــوازي الســطوح إلى P أي أن $\Delta x,\Delta y,\Delta z,$ تقترب من الصفر. إذا كان لا يوجد زيادة للمــائع في أي مكـان، إذن $\nabla.v=0$ وهذه تسمى المعادلة المســتمرة للمــائع غــير القــابل للانضغــاط حيــث أن السائل لا يمكن أن يخلق أو ينعدم عند أي نقطة، يقال أنه لا يوجد منبع أو مصــب. متجه مثل v الذي تباعده يساوي صفرا في بعض الأحيام يسمى لولبي.

22- أوجد الثابت a بحيث أن المتجه $v=(x+3y)\ i+(y-2x)j+(x+az)k$ يكــون نسبيا يكون المتجه v لولبيا إذا كان تباعده يساوي صفرا (مسألة 21).

$$\nabla.v=\frac{\partial}{\partial x}(x+3y)+\frac{\partial}{\partial y}(y-2z)+\frac{\partial}{\partial x}(x+az)=1+1+a$$

إذن $\nabla.v=a+2=0$ when $a=-2$

الالتفاف أو الدوران:

23- إذا كان $A=xz2y=j+2yz4k$ أوجد $\nabla\times A$ (التفاف A) عند النقطة (1,-1,1)

$$\nabla\times A=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\times\left(xz^3i-2x^2zj+2yz^4k\right)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^4\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-2x^2yz\right)\right]i+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(xz^3\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2xz^4\right)\right]j+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2yz\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xz^3\right)\right]k$$

$$=\left(2x^4+2x^2y\right)i\ +\ 3xz^2j\ -\ 4xyzk=3j+4k\ \ at(1,-1,1)$$

24- إذا كان $A = x2yi\text{-}2xzj + 2yzk$ أوجد التفاف التفاف A.

التفاف التفاف $A=\nabla\times(\nabla\times A)$

$$=\nabla\times\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}=\nabla\times\left(2x+2z\right)i-\left(x^2+2z\right)k$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix}=(2x+2)j$$

25- أثبت أن (أ) $\nabla\times(A+B)=\nabla\times A+\nabla\times B$

(ب) $\nabla\times(\phi A)=(\nabla\phi)\times A+\phi(\nabla\times A)$

(أ) ليكن :

$A = A_1i + A_2j + A_3k,\quad B = B_1i + B_2j + B_3k$

إذن

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(A_3+B_3)-\frac{\partial}{\partial z}(A_2+B_2)\right]i+\left[\frac{\partial}{\partial z}(A_1+B_1)-\frac{\partial}{\partial x}(A_3+B_3)\right]j$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(A_2+B_2)-\frac{\partial}{\partial y}(A_1+B_1)\right]k$$

$$=\left[\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right]i+\left[\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_1}{\partial x}\right]j+\left[\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right]k$$

$$+\left[\frac{\partial B_3}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial z}\right]i+\left[\frac{\partial B_1}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial x}\right]j+\left[\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{B_1}{\partial y}\right]$$

$$=\nabla\times A+\nabla\times B$$

(ب)

$$\nabla\times(\phi A_1 i+\phi A_2 j+\phi A_3 k)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3)-\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)\right]i+\left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1)-\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)\right]j+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2)-\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)\right]k$$

$$=\left[\phi\frac{\partial A_3}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3-\phi\frac{\partial A_2}{\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right]i$$

$$+\left[\phi\frac{\partial A_1}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1-\phi\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}A_3\right]j+\left[\phi\frac{\partial A_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2-\phi\frac{\partial A_1}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right]k$$

$$=\phi\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k\right]$$

$$+\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3-\frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right)i+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1-\frac{\partial\phi}{\partial z}A_3\right)j+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2-\frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right)k\right]$$

$$=\phi(\nabla\times A)+\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$=\phi(\nabla\times A)+(\nabla\phi)\times A$$

26- احسب $\nabla.(A\times r)$ if $\nabla\times A=0$

ليكن $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k,\ r = xi + yj + zk$

إذن

$$A\times r=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(zA_2-yA_3)i+(xA_3-zA_1)j+(yA_1-xA_2)k$$

$$\nabla.(A\times r)=\frac{\partial}{\partial x}(zA_2-yA_3)+\frac{\partial}{\partial y}(xA_3-zA_1)+\frac{\partial}{\partial z}(yA_1-zA_2)$$

$$=z\frac{\partial A_2}{\partial x}-y\frac{\partial A_3}{\partial x}+x\frac{\partial A_3}{\partial y}-z\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial A_1}{\partial z}-x\frac{\partial A_2}{\partial z}$$

$$=x\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$=[xi+yj+zk]r.\text{curl}A.$ إذن $\nabla\times A=0$

يصل هذا الصفر.

27- أثبت (أ) $\nabla\times(\nabla\phi)=0 (\text{curl grad}\,\phi=0)$ (ب) $\nabla.(\nabla\times A)=0$ (تباعد الالتفاف $A=0$).

(أ)

$$\nabla\times(\nabla\phi)=\nabla\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k\right)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right]i+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]j+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]k$$

$$=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)i+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)k=0$$

على فرض أن ϕ لها المشتقة الثانية الجزئية المستمرة بحيث أن رتبة التفاضل غير ذات موضوع.

(ب)

$$\nabla.(\nabla\times A)=\nabla.\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

$$=\nabla.\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}=0$$

بفرض أن التفاضل الجزئي الثاني للمتجه A مستمر.

لاحظ التماثل بين النتائج السابقة والنتائج $(C\times Cm)=(C\times C)m=0$ حيث m كمية عددية و $C.(C\times A)=A(C\times C).A=0$.

28- أوجد التفاف $(rf(r))$ حيث $f(r)$ قابلة للتفاضل.

$$\text{curl}(rf(r))=\nabla\times(rf(r))$$

$$=\nabla\times(xf(r)i+yf(r)j+zf(r)k)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix}$$

$$=\left(z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}\right)i\left(x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}\right)j+\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)k$$

ولكن $\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial r}\right)=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{f'x}{r}$

بالتماثل $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f'y}{r}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{f'z}{r}$

إذن النتيجة $=\left(z\frac{f'y}{r}-y\frac{f'z}{r}\right)i+\left(x\frac{f'z}{r}-z\frac{f'x}{r}\right)j+\left(y\frac{f'x}{r}-x\frac{f'y}{r}\right)k=0$

29- أثبت $\nabla\times(\nabla\times A)=-\nabla^2 A+\nabla(\nabla.A)$

$$\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla\times\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k\right]$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\right]i+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right]j$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right]k$$

$$=\left(-\frac{\partial^2 A}{\partial y^1}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)i+\left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}\right)j+\left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}\right)k$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}\right)i+\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}\right)j+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}\right)k$$

$$=\left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)i+\left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)j+\left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)k$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}\right)i+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}\right)j+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)k$$

إذا رغبنا يمكن اختصار مجهود الكتابة في هذا التفاضل كما في غيره من مشتقات بكتابة المركبة، فقط حيث يمكن الحصول على الاخرين بالتشابه.

يمكن استنتاج صيغة النتيجة كالآتي من المسألة (أ) الباب الثاني.

$$A\times(B\times C)=B(A.C)-(A.B)=C \quad (1)$$

ضع $C=F$ و $A=B=\nabla$

$$\nabla\times(\nabla\times F)=\nabla(\nabla.F)-(\nabla.\nabla)F=\nabla(\nabla.F)-\nabla^2 F$$

لاحظ أن الصيغة (1) لابـد أن تكتـب بحيـث أن العـاملين المؤثريـن A و B تسبق المعمول عليه C أو أن الصيغ لا تصلح للتطبيق.

30- إذا كان $v=\omega\times r$ أثبت أن $\omega=\frac{1}{2}\,\text{curl}\,v$ حيث ω هي متجه ثابت.

$$\text{curl}\,v=\nabla\times v=\nabla\times(\omega\times r)=\nabla\times\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_2 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times[(\omega_2 z-\omega_3 y)i+(\omega_3 x-\omega_1 z)j+(\omega_1 y-\omega_2 x)k]$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z-\omega_3 y & \omega_3 x-\omega_1 z & \omega_1 y-\omega_2 x \end{vmatrix}=2(\omega_1 i+\omega_2 j+\omega_3 k)=2\omega$$

$$=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_1 i+A_2 j+A_3 k)$$

$$+i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+j\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=-\nabla^2 A+\nabla\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$

$$=-\nabla^2 A+\nabla(\nabla.A)$$

إذن $\omega=\frac{1}{2}\nabla\times v=\frac{1}{2}$.

تبين هذه المسألة أن الالتفاف لمجال متجه له علاقة بخواص الدوران للمجـال وأكد هذا في الفصل السادس. إذا كان المجـال F نتيجـة لحركـة مـائع مثـلا. عجلـة تغليف موضوعة عند نقطة مختلفة في المجال. فإنها تميل للدوران في المنطقة التي فيـها $\text{Curl}\,F\neq 0$ ، بينما إذا كان $\text{Cyrl}\,F=0$ في المنطقة بالتـالي لا يوجـد دوران. ويسـمى المجال F لا دوراني. المجال الذي لا يكـون لا دورانـي أحيانـا يسـمى مجـال دوامـي Wrtex field.

31- إذا كان $\nabla.E=0, \nabla.H=0, \nabla\times E=-\frac{\partial H}{\partial t}, \nabla\times H=\frac{\partial E}{\partial t}$ بين أن H وE تحقق

$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla\times\left(-\frac{\partial H}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

من المسألة $\nabla\times(\nabla\times E)=-\nabla^2 E+\nabla(\nabla.E)=-\nabla^2 E.\ \text{Then}\ \nabla^2 E=\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

وبالمثل $\nabla\times(\nabla\times H)=\nabla\times\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times E)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial H}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$

ولكن $\nabla^2 H=\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ إذن $\nabla\times(\nabla\times H)=-\nabla^2 H+\nabla(\nabla.H)=-\nabla^2 H$

ترتبط المعادلات المعطاة بمعادلات ماكويل في النظرية الكهرومغناطيسية المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ تسمى معادلة الموجة (wave).

مسائل متنوعة

32- (أ) يسمى المتجه V لا دوراني إذا كان Curl V=0 (أنظر مسألة 30) أوجد الثوابت a,b,c بحيث أن :

$V = (x+2y+az)\,i + (bx-3y-z)j + (4x+cy+2z)k$

يكون لا دوراني.

(ب) بين أن V يمكن التعبير عنها كإنحدار للدلالة العددية.

(أ)

$$\operatorname{curl} v = \nabla\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix}$$

هذه تساوي صفراً عندما a=-4, b=2, c=-1

$V = (x+2y+4z)i + (2x-3y-z)j + (4x-y+2z)k$,

(ب) افترض $v = \nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}i + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}j + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

إذن (1) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = x+2y+4x$, (2) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2x-3y-z,$ (3) $\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 4x-y+2z$

تكامل (1) جزئياً بالنسبة لـ x مع الاحتفاظ بـ y,z ثابتة (4)

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y,z)$$

حيث f(x,y,z) هي دالة اختيارية في y,z بالمثل من (2)، (3).

$$\phi = 2xy - \frac{3y^2}{2} - y^2 + g(x,z) \qquad (5)$$

$$\phi = 4xz - yz + z^2 + h(x,y) \qquad (6)$$

بمقارنة المعادلات (4)، (5)، (6) يلاحظ وجود قيمة مشتركة للكمية ϕ. إذا اخترنا.

$$f(x,y)=-\frac{3y^2}{2}+z^2,\ g(x,z)=\frac{x^2}{2}+z^2\ \ ,\ h(x,y)=\frac{x^2}{2}-\frac{3y^2}{2}$$

لذلك

$$\phi=\frac{x^2}{2}-\frac{3y^2}{2}+z^2+2xy+4xz-yz$$

يلاحظ أنه يمكن إضافة أي ثابت للكمية ϕ. على العموم إذا كانت $\nabla\times v=0$، إذن يمكننا إيجاد ϕ بحيث أن $v=\nabla\phi$. مجال المتجه V الذي يمكن اشتقاقه من المجال العددي ϕ . بحيث أن $v=\nabla\phi$ تسمى مجال متجه محافظ وتسمى ϕ الجهد العددي. لاحظ عكسياً أنه إذا كان $v=\nabla\phi$. إذن $\nabla\times v=0$.

أنظر مسألة (27أ)

33- بين أنه إذا كانت $\phi(x,y,z)$ هي أي حل لمعادلة لابلاس إذن $\nabla\phi$ يكون لولبياً وغير دوراني.

من الفرض ϕ تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2\phi=0$ أي أن $\nabla.(\nabla.\phi)=0$ إذن $\nabla\phi$. تكون لولبية. (أنظر المسائل 2-22).

من المسألة (27أ) ، $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ بحيث $\nabla\phi$. تكون أيضاً غير دورانية.

34- أوجد التعريف المسكن الانحدار B.

بفرض $B=B_1i+B_2j+B_3k$ إذا أمكن تعريف انحدار B بالصيغة الآتية.

$$\nabla_B=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(B_1i+B_2j+B_3k)$$
$$=\frac{\partial B_1}{\partial x}ii+\frac{\partial B2}{\partial x}ij+\frac{\partial B_2}{\partial x}ik$$

$$+\frac{\partial B_1}{\partial y}ji+\frac{\partial B_2}{\partial y}jj+\frac{\partial B_2}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial B_1}{\partial z}ki+\frac{\partial B_2}{\partial z}kj+\frac{\partial B_3}{\partial z}kk$$

الكميات ....ij، ij الخ تسمى وحدة ثنائية Dyads (لاحظ أن ij مثلاً ليست مثل ji). كمية في الصيغة:

$$a_{11}ii + a_{12}ij + a_{13i}k + a_{21}ji + a_{22}jj + a_{23}jk + a_{31}ki + a_{32}kj + a_{33}kk$$

تسمى ثنائية والمعاملات ... ... ,a11, a12 هي مركباتها أي مصفوفة من هذا المركبات التسعة في الصيغة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة 3 في 3. الثنائي هو تعميم لمتجه. ما زال يوجد تعميم آخر يؤدي إلى الثالوت triadios التي هي كميات تتكون من 27 حد في الصيغة $a_{111}iii+$ ... a_{2111} jiii+ دراسة كيفية تحول المركبات الثنائية أو الثلاثة من نظام إحداثيات إلى آخر يؤدي إلى دراسة تحليل الكميات الممتدة tenscr analysis الي سوف نتعرض لها في الفصل الثامن.

35- ليكن المتجه A معرف بالمعادلة $A= A_1i + A_2j + A_3k$ والثنائي ϕ بالمعادلة.

$$\phi= a_{11}ii+ a_{12}ij+a_{13}ik+a_{21}ji+a_{22}jj+a_{23}jk+a_{31}jk+a_{23}\ kj+a_{33}kk$$

أوجد تعريفاً ممكناً للكمية $A.\phi$.

بفرض أن قانون التوزيع صحيح.

$$A.\phi = (A_1i+A_2j+A_3k).\ \phi= A_1i.\ \phi +A_2j.\ \phi +A_3k.\ \phi$$

كمثال، أعتبر $i.\ \phi$ تكون حاصل الضرب هذا بأخذ الضرب العددي (الدت) للقيمة i بكل حد من حدود ϕ ثم جمع النتائج. كأمثلة نموذجية.

$i.a_{11}ii$, $i.a_{12}ij$, $a_{21}ji$, $i.a_{32}kj$ الخ

إذا أعطينا معنى لهذه الحدود كالآتي:

$i . a_{11}ii = a_{11}(i.i)i = a_{11}i$ حيث $i.i = 1$

$i . a_{12}ij = a_{12}(i.i)j = a_{11}j$ حيث $i .i = 1$

$i . a_{21}ji = a_{21}(i.j)i = 0$ حيث $i.j = 1$

$i . a_{32}kj = a_{32}(i.k)j = 0$ حيث $i.k = 1$

بإعطاء تعليل مشابه لحدود الكميات $k.\phi$ و $j.\phi$ إذن

$$A.\phi = A_1(a_{11}i+a_{12}j+a_{12}k)+A_2(a_{21}i+a_{22}j+a_{23}k) + A_3(a_{31}i+a_{32}j+a_{33}k)$$
$$=(A_1a_{11}+A_2a_{21}+A_3a_{31})i +(A_1a_{12}+A_2a_{22}+A_3a_{32})j+(A_1a_{13}+A_2a_{23}+A_3a_{33})k$$

التي هي كمية متجه.

36- (أ) علل الرمز $A.\nabla$ (ب) أعطى المعنى للكمية $(A.\nabla)B$ (جـ) هل ممكن كتابته كالآتي $A.\nabla B$ بدون (ابهام).

(أ) ليكن $A= A_1i+ A_2j + A_3k$ إذن، بصيغتها.

$$A.\nabla=(A_1i+A_2j+A_3k).\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial x}k\right)$$
$$=A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

كعامل مؤثر. كمثال.

$$(A.\nabla)\phi=\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=A_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+A_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+A_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

لاحظ أن هذه الكمية $A.\nabla\phi$.

(ب) باستخدام (أ) واستبدال ϕ بالمتجه $B=B1i + B2j+ B3k$.

$$(A.\nabla)=\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_1\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)B=A_1\frac{\partial B}{\partial x}+A_2\frac{\partial B}{\partial y}+A_3\frac{\partial B}{\partial z}$$
$$=\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_1}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)i+\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_2}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)j$$
$$+\left(A_1\frac{\partial B_3}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_3}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)k$$

(جـ) استخدم التعليل الذي أعطى في المسألة 334 للقيمة ∇B إذن تبعاً للرموز التي استخدمت في المسألة 35.

$$(\nabla B)=(A_1 i+A_2 j+A_3 k).\nabla B=A_1 i.\nabla B+A_2 j.\nabla B+A_3 k.\nabla B$$
$$=A_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}i+\frac{\partial B_2}{\partial x}j+\frac{\partial B_3}{\partial x}k\right)+A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}i+\frac{\partial B_2}{\partial y}j+\frac{\partial B_2}{\partial y}k\right)$$
$$+A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}i+\frac{\partial B_2}{\partial z}j+\frac{\partial B_2}{\partial z}k\right)$$

التي تعطى نفس النتيجة كالتي أعطيت في الجزء (ب). ومنها يأتي أن: $(A.\nabla)B=A.\nabla B$ بدون التباس (غموض) أعطيت فكرة الثنائيات بخواصها كما وضح.

37- إذا كان $A=2yzi-x^2vi+xz^2k$, $B=x^2i+yzj-xyk$ and $\phi=2xyz^3$ أوجد:

(أ) $(A.\nabla)\phi$ (ب) $A.\nabla\phi$ (جـ) $(A\times\nabla)\phi$ (د) $A\times\nabla\phi$

(أ)

$$(A.\nabla)\phi=\left[(2xzi-x^2yj+xz^2k)\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\right]\phi$$
$$=\left(2xyz\frac{\partial}{\partial x}-x^2y\frac{\partial}{\partial y}+xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2yz^3)$$
$$=2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3)-x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3)+xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3)$$
$$=(2yz)(4xyz^3)-(x^2y)(2x^2z^3)+(xz^2)(6x^2yz^2)$$
$$=8xy^2z^4-2x^4yz^3+6x^3yz^4$$

(ب)

$$A.\nabla\phi=\left(2yzi-x^2yj+xz^2k\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k\right)$$
$$=\left(2xzi-x^2yj+xz^2j+xz^2k\right)\left(4xyz^3i+2x^2z^3j+6x^2yz^2k\right)$$
$$=8xy^2z^4-2x^4z^2+6x^3yz^4$$

بالمقارنة بـ (1) وضح النتيجة $\phi A.\nabla\phi$ $(A.\nabla)$

$$(B.\nabla)A=\left[\left(x^2i+yzj-xyk\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\right]A$$
$$=\left(x^2\frac{\partial}{\partial x}+yz\frac{\partial}{\partial y}-xy\frac{\partial}{\partial z}\right)A=x^2\frac{\partial A}{\partial x}+yz\frac{\partial A}{\partial y}-xy\frac{\partial A}{\partial z}$$
$$=x^2\left(-2xyj-z^2k\right)+yz\left(2zi-x^2j\right)-xy\left(2yi+2xzk\right)$$
$$=\left(2yz^2-2xy^2\right)i-\left(2x^2y+x^2yz\right)j+\left(x^2z^2-2x^2yz\right)k$$

بمقارنة هذه مع $B.\nabla A$ أنظر مسألة (36–جـ).

(د)

$$(A\times\nabla)\phi=\left[\left(2xzi-x^2yj+xz^2k\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial z}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\right]\phi$$
$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$
$$=\left[i\left(-x^2y\frac{\partial}{\partial z}-xz^2\frac{\partial}{\partial y}\right)+j\left(xz^2\frac{\partial}{\partial x}-2yz\frac{\partial}{\partial z}\right)+k\left(2yz\frac{\partial}{\partial y}+x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi$$
$$=-\left(x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}+xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)i+\left(xz^2\frac{\partial}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)j+\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)k$$
$$=-\left(6x^4y^2z^2+2x^3z^5\right)i+\left(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3\right)j+\left(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3\right)k$$

(هـ)

$$A\times\nabla\phi=(2yzi-x^2yj+xz^2k)\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k\right)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}-xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)i+\left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)j+\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)k$$

$$=-\left(6x^4y^2z^2+2x^3z^5\right)i+\left(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3\right)j+\left(4x^3y^2z^3\right)k$$

المقارنة بالمقدار (د) يوضح النتيجة $(A\times\nabla)\phi=A\times\nabla\phi$

الثبات:

38- نظام احداثين متعامدين x',y',z' و xyz لهم نفس نقطة الأصل بدوران بالنسبة إلى بعضهم البعض. أشتق معادلات التحول بين الاحداثيات لنقطة النظامين.

ليكن r' و r هي متجهات الموضع لأي نقطة في نظامي الاحداثيات (أنظر شكل 4-1) إذن حيث $r=r'$.

$$x'i'+y'j'+z'k'=xi+yj+zk \qquad (1)$$

الآن لأي متجه A يكون (مسألة 20، الفصل الثاني)

$$A=(A.i')\,i'+(A.j')\,j'+(A.\,k')\,k'$$

إذن ليكن $A=i,j,k$ على التوالي.

$$\begin{cases} i=(i.i')i'+(i.j')j'+(i.k')k'=l_{11}i'+l_{21}j'+l_{31}k' \\ j=(j.i')i'+(j.j')j'+(j.k')k'=l_{12}i'+l_{22}j'+l_{32}k' \\ k=(k.i')i'+(k.j')j'+(k.k')k'=l_{13}i'+l_{23}j'+l_{33}k' \end{cases}$$

بالتعويض بالمعادلة (2) في (1) ومساواة معاملات i',j',k' نجد أن:

$$x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, \quad y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z, \quad z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z \quad (3)$$

وهي معادلات التحول المطلوبة.

39- أثبت

$$\begin{aligned} i' &= l_{11} i + l_{12} j + l_{13} k \\ j' &= l_{21} i + l_{22} j + l_{23} k \\ k' &= l_{31} i + l_{32} j + l_{33} k \end{aligned}$$

لأي متجه A ليكن $A\ (A.i)\, i + (A.j)\, j + (A.k)\, k$

إذن ليكن $A = i', i', k'$ على التوالي.

$$\begin{cases} i' = (i'.i)i + (i'.j)j + (i'.k)k = l_{11}i + l_{21}j + l_{21}k \\ j' = (j'.i)i + (j'.j)j + (j'.k)k = l_{21}i + l_{22}j + l_{23}k \\ k' = (k'.i)i + (k'.j)j + (k'.k)k = l_{31}i + l_{32}j + l_{33}k \end{cases}$$

40- أثبت أن $\sum_{\rho=1}^{3} l_{\rho n} - 1 \text{ if } m = n, \text{ and } 0 \text{ if } m \neq n$ يمكن أن تأخذ أياً من القيم 1,2,3 من المعادلات (2) في المسألة 38.

$$\begin{cases} i.i = 1 = (l_{11}i' + l_{21}j' + l_{31}k').(l_{11}i' + l_{21}j' + l_{31}k') \\ \quad = l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 \\ i.j = 0 = (l_{11}i' + l_{21}j' + l_{31}k').(l_{12}i' + l_{22}j' + l_{32}k') \\ \quad = l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32} \\ i.k = 0 = (l_{11}i' + l_{21}j' + l_{21}k').(l_{13}i' + l_{23}j' + l_{33}k') \\ \quad = l_{11}l_{13} + l_{21}l_{23} + l_{31}l_{33} \end{cases}$$

هذه المعادلات تنشئ النتيجة المطلوبة حيث m=1 باعتبار j.i, j.j, j.k,k.i, k.j and k.k يمكن إثبات النيجة لقيم m=2 , m=3.

بكتابة $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ if } m = n \\ 0 \text{ if } m \neq n \end{cases}$ the result can be written $\sum_{\rho=1}^{3} l_{pm}\, l_{pn} = \delta_{mn}$

الرمز δ_{mn} يسمى رمز كروينكو.

41- إذا كانت $\phi(x,y,z)$ كمية عددية ثابتة، بالنسبة لدوران المحاور. أثبت أن انحدار ϕ يكون متجهاً ثابتاً تحت هذا الدوران.

من الفرض $\phi(x,y,z) = \phi'(x',y',z')$ وللحصول على النتيجة المطلوبة لابد من اثبات أن:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}i'+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}j'+\frac{\partial\phi'}{\partial z'}k'$$

باستخدام قانون السلسلة ومعهادلات التحول (3) التي فيها 38 نجد أن:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{11}+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{21}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{31}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{12}+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{22}+\frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{32}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{13}+\frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{23}+\frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{33}$$

بضرب هذه المعادلات بالكميات i,j,k على الترتيب والجمع واستخدام 39 يمكن الحصول على النتيجة المطلوبة.

مسائل متنوعة

42- إذا كان $\phi= 2xz^4-x^2y$ أوجد $\nabla\phi$ و $|\nabla\phi|$ عند النقطة (1- ,2-,2).

الجواب: $10i-4j16k.2\sqrt{93}$

43- إذا كان $\phi= 2x-x^3y$ و $A=2x^2i - 3yzj + xz^2k$ أوجـد $A.\nabla\phi$, $A\times\nabla\phi$ عنـد النقطة (1,-1,1).

الجواب: 5,7i-j-11k.

44- إذا كان G =22y - xy2 و F=x2z+ey/x (أ) أوجد ∇(A+G) (ب) ∇(FG) عند النقطة (1,0,-2) .

الجواب: -4i+9j+k (ب) -8j.

45- أوجد $\nabla|r|^3$.

الجواب : 3rr

46- أثبت $\nabla f(r)=\frac{f'(r)r}{r}$

47- احسب $\nabla\left(3x^2-4\sqrt{r}+\frac{6}{\sqrt[3]{r}}\right)$.

الجواب: $\left(6-2r^{-3/2}-2r^{-7/3}\right)r$

48- إذا كان $\nabla U=2r^4r$ أوجد U الجواب $r^{5/3}$+ ثابت.

49- أوجد $\phi(r)$ بحيث أن $\nabla\phi=\frac{r}{r^5}$ and $\phi(1)=0$.

الجواب: $\phi(r)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{r^3}\right)$

50- أوجد $\Psi\nabla$ حيث $\psi-\left(x^2+y^2+x^2\right)e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

الجواب: $(2-r)\ e^{-r}r$.

51- إذا كان $\phi\nabla= 2xz^3i + x^2z^2j+ 3x_2yz^2k$ أوجد $\phi(x,y,z)$ إذا كان $\phi(1,-2, 2)=4$.

الجواب: $\phi= x2yz3=20$.

52- إذا كان $\phi\Psi(y^2-2xyz^3)i+ (3+2xy-x^2z^3)k$ أوجد Ψ.

الجواب: $\Psi= xy^2-x2yz^3+3y+(3/2)z$ + ثابت

53- إذا كانت U دالة قابلة للتفاضل عند x,y,z أثبت أن $\nabla U.dr = du$.

54- إذا كانت F دالة قابلة للتفاضل عند x,y,z,y,t حيث x,y,z دوال قابلة للتفاضل في t اثبت أن.

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla F.\frac{dr}{dt}$$

55- إذا كان A متجهاً ثابتاً. أثبت $\nabla(r.A) = A$.

56- إذا كان $A(x,y,z)=A_1i+A_2j+A_3k$ بين أن: $dA=(\nabla A_1.dr)i+(\nabla A_2.dr)j+(\nabla A_3.dr)k$.

57- أثبت $\nabla\left(\frac{F}{G}\right)=\frac{G\nabla F-F\nabla G}{G^2}$ if $G\neq0$.

58- أوجد وحدة المتجه العمودي على سطح الجسم المكافئ الدوراني (الناتج عن دوران قطع مكافئ) $x=x^2+y^2$ عند النقطة (1,2,5). $\frac{2i+4j-k}{\pm\sqrt{12}}$.

59- أوجد الوحدة العمودية المرسومة على السطح $(x-1)2+y2+(z+2)P2=5$ للخارج عند النقطة (3,1,-4).

الجواب: $(2i+j-2k)/3$.

60- أوجد معادلة المستوى للسطح $xz^2+x^2y=z-1$ عند النقطة (1,-3,2).

الجواب: $2x-y-3x+1=0$.

61- أوجد معادلات المستوى العمودي للسطح $z = x2+y2$ عند النقطة (2,-1,5).

الجواب: $x=4t+2, y=-2t-1, z=-t+5$ أو $4x-2y-z=5, \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{-1}$

62- أوجد المشتقة الاتجاهية للكمية $\phi= 4xz^3-3x^2y^2z$ عند (2,-1,2) في اتجاه 2i-3j+6k.

الجواب: 376/7.

63- أوجد المشتقة الاتجاهية للكمية $p= 4e^{-2x-y}+z$ عند النقطة (1,1,-1) في اتجاه النقطة (-3,5,6).

الاجابة: 9/ 20-

64- في أي اتجاه من النقطة (1,3,2) تكون المشتقة الاتجاهية للكمية $\phi(2xz-y^2)$ أكبر ما يمكن؟ ما هي قيمة أكبر كمية؟

الجواب: 4i-6j + 3k, 2v+ 14.

65- أوجد قيمة الثوابت a,b,c بحيث أن المشتقة الاتجاهية للكمية $\phi = axy^2+byz+cz^2x^3$ عند النقطة (1,2-1) لها قيمة عظمى تساوي 64 في اتجاه يوازي محور z.

الجواب: a=6, b=24, c=-8.

66- أوجد الزاوية الحادة بين السطحين $xy^2z = 3x+z^2$ and $3x^2-y^2+2z=$ عند النقطة (1,-2,1) .

الجواب: $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{12}}=\arccos\frac{\sqrt{6}}{14}=79°55'$

67- أوجد الثوابت b,a حيث أن السطح $ax^2-byz = (a+2)x$ يكون عمودياً على السطح $4x^2y + z^3=4$ عند النقطة (1و-1و2).

الجواب: $a = -5/2, b=1$.

68- (أ) ليكن v, u دوال قابلة للتفاضل x,y,z بين أن الشرط اللازم والكافي لكل تكون v,u دوال مرتبطة بالمعادلة F(u,v)=0 بحيث أن $\nabla u\times\nabla v=0$.

(ب) بين إذا كان $v=\frac{x+y}{1-xy}$ و $u = \text{arv}\tan x + \text{arc}\tan y$ تكون دوال مرتبطة.

الجواب: (ب) $v = \tan u)$

59- (أ) بين أن الشرط اللازم والكافي لأن يكون $\omega(x,y,z)$ و $\nu(x,y,z)$ و $u(x,y,z)$ دوال مرتبطة بالمعادلة. $F(u,\nu,\omega) = 0$ يكون $\nabla_u . \nabla_\nu \times \nabla_\omega = 0$.

(ب) عبر عن $\nabla^u . \nabla^\nu \times \nabla^\omega$ في صيغة محدد. يسمى هذا المحدد الجاكوبيان للكميات ν $\omega, u,$ بالنسبة إلى x,y,z وتكتب كالآتي $j\left(\frac{u,\nu,\omega}{x,y,z}\right)$ أو $\frac{\partial(u,\nu,\omega)}{\partial(x,y,z)}$.

(جـ) أوجد إذا كان $\omega = xy+yz+zx$ و $\nu = x^2+x^2+z^2$, $u = x+y+z$ تكون دوال مرتبطة.

الجواب: (ب) $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} & \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{vmatrix}$ (جـ) Yes $(u2-\nu-2\omega = 0)$

70- إذا كان $\phi = 3x^2-yz$ و $A = 3zy^2 i + 2xy\, j - x^2yzk$ أوجد:

(أ) $A.\nabla$ (ب) $A.\nabla\phi$ (جـ) $\nabla.(\phi A)$ (د) $\nabla.(\nabla\phi)$ عند النقطة $(1,-1,1)$.

الاجابة: (أ) 4 (ب) -15 (جـ) 1 (د) 6 .

71- احسب $\text{div}\,(2x^2zi - xy^2zj + 3yz^2k)$.

الجواب: $4xz-2xyz+6yz$.

72- إذا كان $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$ أوجد Δ^2 .

الجواب: $6z+24\,xy\ \ 2z^3-6y^2z$.

73- احسب $\nabla^2 (\ln r)$.

الجواب: j/r^2

74- أثبت أن $\nabla^2 r^n = n(n+1)\, r^{n-2}$ حيث n عدد ثابت.

75- إذا كان $F = (3x^2y-z)i + (xz^2+y^4)j - 2x^3z^2k$ أوجد $\nabla(\nabla.F)$ عند النقطة (2,-1,0).

الاجابة: $-6i + 24j - 32k$.

76- إذا كان ω متجهاً ثابتاً $v = \omega \times r$ أثبت أن $div\ v=0$.

77- أثبت $\nabla^2(\phi\Psi) = \phi\nabla^2\Psi + 2\nabla\phi.\nabla\Psi + \Psi\nabla^2\Psi$

78- إذا كان $U= 3x^2y,\ V= xz^2-2y$ احسب $grad\ [\ (grad\ U).\ (grad\ V)]$.

الجواب: $(6yz^2-12x)i + 6xz^2j + 12xyzk$.

79- احسب $\nabla.\ (r^3r)$. الجواب: 6r3 .

80- احسب $\nabla.[r\nabla(1/r^3)]$. الجواب: $3r^{-4}$

81- احسب $\nabla^2.[r\nabla(1/r^2)]$. الجواب $2r^{-4}$

82- إذا كان $A = r/r$. أوجد انحدار الالتفاف للمتجه A.

الجواب: $2r^{-3}r$.

83- أثبت أن (أ) $\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{1}\frac{df}{dr}$ (ب) أوجد $f(r)$ بحيث أن 0 = $\nabla^2 f(r)$.

الجواب: $f(r) = A + B/r$ حيث A، B ثوابت اختيارية.

84- أثبت أن المتجه $A = 3y^4z^2i + 4x^3z_2j - 3x^2y^2k$ يكون لولبياً.

85- بين أن $A = (2x^2+8xy^2z)\ i = (3x^3y-3xy)j - (4y^2z^2+2x^3z)k$ لا يكون لولبياً ولكن $B=xyz^2A$ تكون لولبية.

86- أوجد الدالة القابلة للتفاضل الأكثر عموماً $f(r)$ بحيث أن $fr(r)$ تكون لولبية.

الجواب: $f(r) = C/r^3$ حيث C عدد اختياري ثابت.

87- بين أن المجال المتجهي $v=\frac{-xi-yj}{\sqrt{x^2+y^2}}$ يكون "مجال مصيباً" ارسم وأعطي تعليلاً فيزيائياً.

88- إذا كان V,U مجال عددين قابلين للتفاضل أثبت أن $\nabla U\times\nabla V$ تكون لولبية.

89- إذا كان $\phi= x^2yz$ و $A = 2xz^2i-yzj + 2xz^3k$ أوجد:

(أ) $\nabla + A$ (ب) curl (ϕA) (جـ) $\nabla \times(\nabla\times A)$

(د) Δ[A. curl A] (هـ) curl grad (ϕA) عند المقطة (1,1,1).

الجواب:

(أ) i + j (ب) 5i-3j-4k (جـ) 5i + 3k

(د) -2i +j +5k (هـ) 0

90- إذا كان F= x2yz, G=xy-3z2 أوجد:

(أ) $\nabla[(\Delta F).(\nabla G)]$ (ب) $\nabla.[(\nabla F)\times(\nabla G)]$ (جـ) $\nabla\times[(\nabla F)\times(\nabla G)]$

الإجابة:

(أ) $(2y^2z+3x^2z-12xyz)\, i + (4xyz-6xyz-6xz)j + (2xy^2+x^3-6x^2y)k$

(ب) 0

(جـ) $(x^2z-24xyz)i - (12x^2z+2xyz)j +(2xy^2+12yz^2+x^2)k$

91- احسب $\left|\nabla\times\left(r/r^2\right)\right.$ الاجابة: 0

92- لأي قيمة للثابت a يكون المتجه $A = (axy -z^3)i + (a-2)x^2j + (1-a)xz^2k$ له التفاف يساوي الصفر؟

الجواب: a = 4.

93- أثبت أن curl (ϕ grad ϕ) = 0.

94- ارسم مجالات المتجه $A = xi + yj$ and $B = yi-xj$ واحسب التباعد والالتفاف لكل متجه في المجال واشرح المعنى الفيزيائي للنتيجة التي حصلت عليها.

95- إذا كان $B=v^2i - vzj + 2xk$, $A = x^2zi + yz^3j-3xyk$ أو $\phi=2x^2+yz$ أوجد:

(أ) $A.(\nabla\phi)$ (ب) ϕ (جـ) $(A.\nabla)B$ (د) $B(A.\nabla)$ (هـ) $(\nabla.B)B$

الاجابة:

(أ) $4x^3z+yz^4-3xy^2$ (ب) $4x^3z-yz^4-3xy^2$ (مثل(أ))

(جـ) $2y^2z3i + (3xy^2-yz4)j + 2x^2zk$

(د) the operator $\left(x^2y^2zi-x^2yz^2j+2x^3zk\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(y^2z^3i-y^2z^4j+2xyz^3k\right)\frac{\partial}{\partial y}$

$$+\left(-3xy^3i+3xy^2zj-6x^2yk\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

(هـ) $\left(2xy^2z+y^2z^3\right)i-\left(2xyz^2+yz^4\right)j+\left(4x^2z+2xz^3\right)k$

96- إذا كان $\phi = xyz$ ، $B = 3xi + 4zj - xyk$ ، $A = yz^2i-3xz^2j+ 2xyzk$, أوجد:

(أ) $A+ (\nabla\phi)$ (ب) $(A\times\nabla)\phi$ \ (جـ) $(\nabla\times A)\times B$ (د) $B.\nabla \times A$.

الاجابة:

(أ) $-5x^2yz^2i + xy^2z^2j + 4xyz^3k$ (مثل (أ))

(ب) $-5x'yz^2i + xv^2z^2j +4xyz^3k$

(جـ) $24x'z+4xyz^2$

(د) $16z_2i+ (8x^2yz)j +32xz^2k$

97- أوجد $A\times(\nabla\times B)$and$(A\times\nabla)\times B$ عند النقطة $(1,-, 2)$

إذا كان $B=2xzi+2yzj-z'k$ و $A = xz^2i+2yj-3xzk$

الجواب: $(A\times\nabla)\times 4j+76k$ ، $A\times(v\times B)=18i-12j-16k$.

98- أثبت $(v.\nabla)v=\frac{1}{2}\nabla v^2-v\times(\nabla\times v)$

99- أثبت $\nabla.(A\times B)=B.(\nabla\times A)-A.(\nabla\times A)$

100- أثبت $\nabla\times(A\times B)=(B.\nabla)A-B(\nabla.A)-(A.\nabla)B+A(\nabla.B)$

101- أثبت $\nabla(A.B)=(B.\nabla)A+(A.\nabla)B+B\times(\nabla\times A)+A\times(\nabla\times B)$

102- بين أن $A=(6xy+z^3)i+(3x^2-z)j+(3xz^2-y)k$ تكون غير دورانية أوجد ϕ بحيث أن $A=\nabla\phi$.

الجواب: $\phi= 3x'y+xz-yz+$ constant

103- بين أن $E=r/r^2$ تكون غير دورانية. أوجد ϕ بحيث أن $E=-\nabla\phi$ حيث $\phi(a)=0$ عندما $a>0$.

الجواب: $\phi=\ln(a/r)$

104-إذا كان A,B متجهات غير دورانية. أثبت أن $A\times B$ لولبية.

105- إذا كان $f(r)$ قابلة للتفاضل، أثبت أن $f(r)r$ تكون غير دورانية.

106- هل يوجد دالة قابلة للتفاضل V بحيث أن (أ) curl V=r (ب)curl V=2i+j+3k? إذا كان ذلك، أوجد V .

الجواب:

(أ) لا (ب) $v=3xj+(2y-z)k.\ \nabla\phi$ حيث ϕ دالة مزدوجة قابلة للتفاضل اختيارية.

107- بين أن حل معادلة ماكسويل هي:

$$\nabla\times H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},\ \nabla\times E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t},\ \nabla.H=0,\ \nabla.E=4\pi\rho$$

حيث ρ دالة في x,y,z و c سرعة الضوء بفرض أنها ثابتة تعطى بالعلاقة.

$$E=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}.H=\nabla\times A$$

حيث A و ϕ تسمى جهد المتجه والجهد العددي على الترتيب وتحقق المعادلات.

$$\nabla^2 A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\ (3)\qquad \nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\ (2)\qquad \nabla.A+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\ (1)$$

108- (أ) أعطيت الثنائي $\phi= ii+ jj+kk$ احسب r. (r.ϕ.).r (ب) هل يوجد التباس في كتابة؟ r. ϕr.؟ (جـ) ما هي r .ϕ.r = 1 مثل بيانياً؟

الجواب: (أ) $r.(\phi.r) = (r.\phi).r = x^2+y^2+z^2$

(ب) لا

(جـ) كرة نصف قطرها واحدة ومركزها عند النقطة الأصل.

109- (أ) إذا كان $B= 2x2i - xyj + y3k$ و $A = xzi - y^2j + yz^2k$ أعطي المعنى الممكن للكمية $(A \times\nabla)B$ عند النقطة (1,-1,1).

(ب) هل من الممكن كتابة النتيجة في الصورة $A \times(\nabla B)$ باستخدام الثنائي؟

الجواب: (أ) -4ii - ij + 3ik - jj - 4ji + 3kk

(ب) نعم، إذا كانت العيملية قد أدت.

110- أثبت أن $\phi(x,y,z) = =x^2+y^2+z^2$ تكون عددا ثابتا تحت دوران المحاور.

111- إذا كان A(x,y,z) مجالا متجها قابل للتفاضل بالنسبة لدوران المحاور. أثبت أن (أ) div A و (ب) curl A يكونوا ثوابت مجال عددية وثوابت مجال متجهي على الترتيب تحت التحول.

112- حل المعادلات (3) للمسائل المحلولة 38 لقيم x,y,z بدلالة x',y',z'.

الجواب: $x= l_{11}x' + l_{21}y' + l_{31}z'$, $y= l_{12}x' + 122z'$, $z = l_{31}y'+l_{23}y'+l_{33}z'$

113- بين انه تحت تأثير الدوران

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} = i'\frac{\partial}{\partial x'} + j'\frac{\partial}{\partial y'} + k'\frac{\partial}{\partial z'} = \nabla'$$

115- بين أن عامل يكون لابلاس يكون ثابت تحت تأثير الدوران.

المراجع

- مبادئ الرياضيات – أحمد محم خير، عدنان محمد – منشورات جامعة آل البيت -2001.

- عبد ربه ابراهيم علي، زغلول يحيى سعد- مقدمة في الرياضيات البحتة – الدار الجامعية – الاسكندرية- مصر 1988.

- نظرية المجموعات – محمود محمد كتكتب – دار الفرقان للنشر والتوزيع 1999.

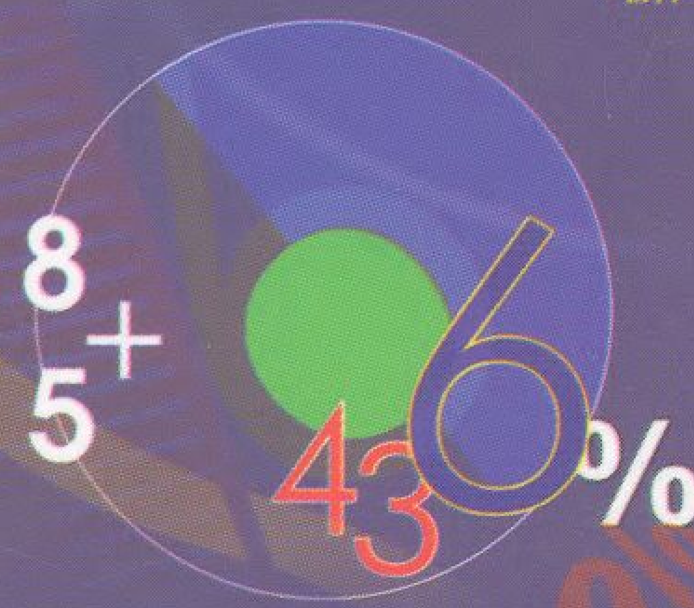
- المدخل إلى الرياضيات الحديثة- قيس الوهابي – مؤسسة الشرق والنشر والترجمة، الدوحة – قطر 1985.

- مدخل إلى الرياضيات .د.و. سوبر. ترجمة د. أديب عبد الله ود. عطية عاشور الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر.

- المدخل إلى الرياضيات الحديثة- سعد حسنين وآخرون – دار المعارف بمصر – القاهرة.

الرياضيات الحديثة

- الكميات المتجهة
- الهندسة الناقصية
- الاقترانات المطابقة (المشاكلة)
- المنطق ، المجموعات ، البنى الجبرية
- الانحدار والتباعد والالتفاف



نائل اسماعيل الفيومي



www.darsafa.net

